UNIVERSITETI I TIRANËS
DEPARTAMENTI I MATEMATIKËS

Punim

Aspekte oshilacioni në zgjidhjet e ekuacioneve diferenciale jolineare të rendit të dytë

Per graden shkencore doktor i shkencave

Udhëheqës
Prof. dr. Neki Frasheri
Prof. dr. Fatmir Hoxha

Punoi
Xhevair Beqiri

Tiranë 2012

UNIVERSITETI I TIRANËS
DEPARTAMENTI I MATEMATIKËS

Punim

Aspekte oshilacioni në zgjidhjet e ekuacioneve diferenciale jolineare të rendit të dytë

Per graden shkencore doktor i shkencave

Udhëheqës
Prof. dr. Neki Frasheri
Prof. dr. Fatmir Hoxha

Punoi
Xhevair Beqiri

Tiranë 2012

Parathënia

Punimi i kushtohet natyrës së zgjidhjeve të ekuacionit diferencial të rendit të dytë, konkretisht jep një pasqyrë mbi kriteret sipas të cilave zgjidhjet e këtyre barazimeve janë oshiluese . Në dekadat e fundit teoria e oshilacionit te ekuacionet e zakonshme diferenciale , lineare , jolineare , të pjesshme etj. si dhe të formave diskrete të tyre është hulumtuar nga një numër i madh autorësh. Kjo mund të argumentohet me qindra punime shkencore të kësaj fushe të botuara në revistat kryesore ndërkombëtare të matematikës. Poashtu janë shumë tekste të cilat qellim kryesor kanë zgjidhjet oshiluese të ekuacioneve diferenciale. Këtu paraqitet kontributi im në përcaktimin e kritereve të cilat kushtëzojnë zgjidhjet oshiluese të ekuacioneve diferenciale jolineare të rendit të dytë dhe disa formave të caktuara të tyre të cilat ilustrohen me ndërtimin e shembujve . Poashtu do të theksoj qe jane përdorur edhe rezultate të arritura viteve të fundit në teorinë e oshilacionit kushtuar ekuacioneve diferenciale të rendit të dytë.

Në fillim në Hyrje paraqiten, ekuacioni diferencial i rendit të dytë në formë të përgjithshme , shënimet për klasat e funksioneve që përdoren në shtjellimin e temës si dhe përkufizimet për zgjidhjet oshiluese dhe jooshiluese të ekuacionit diferencial të rendit të dytë. Përmenden edhe metodat të cilat përdoren në ndërtimin e kritereve oshiluese.

Në Pohime ndihmëse, paraqiten disa teorema siç është jobarazimi i Hollderit , Minkovskit si dhe disa relacione të cilat përdoren në vërtetimin e teoremave të oshilacionit që paraqiten në vazhdim.

Pastaj vazhdohet me disa pohime bazë që përcaktojnë natyrën oshiluese te ekuacionet diferenciale lineare.

Në vazhdim jepen disa rezultate bazë në teorinë e oshilacionit për ekuacionin diferencial linear të zakonshëm të rendit të dytë , paraqesim teoremën krahasuese të Shturm – Pikones [8] , pastaj paraqesim kushtet e nevojshme dhe të mjaftueshme për zgjidhjet jooshiluese si dhe kushtet e mjaftueshme të oshilacionit për ekuacionin diferencial të rendit të dytë me koeficientë të ndryshueshëm.

Në vitet e fundit studimi i ekuacioneve gjysmë lineare diferenciale ka qenë si objekt studimi nga ana e shumë autorëve në teorinë e oshilacionit. Është me rëndësi fakti se barazimet gjysmë lineare ndeshen në shumë probleme të ndryshme në botën reale siç janë teoria e lëvizjeve oshiluese , teoria e fluideve, e gazit politrofik në mjediset poroze etj.

Pastaj , paraqiten kritere oshiluese të ekuacionet gjysmë - linear diferencial të rendit të dytë duke përdor metodën e të mesmes integrale .

Paraqitet teori oshilacioni për ekuacionet diferenciale jolineare të rendit të dytë të tipit superlinear . Në përgjithësi diskutohen rezultate ku paraqitet integrali i koeficientëve të ndryshueshëm dhe vërtetohen disa kritere ku përdoret përafrimi mesatar i këtyre integraleve. Paraqiten kushtet e nevojshme dhe të mjaftueshme për oshilimin e ekuacionet superlinearë .

Krahas këtyre kritereve studiohen edhe zgjidhjet oshiluese të ekuacionit më të përgjithësuar diferencial jolinear me kufizë shuarje si dhe tipi i ekuacioneve diferenciale i ashtuquajtur i turbulluar .

Gjithashtu paraqiten kushtet të cilat sigurojnë se të gjitha zgjidhjet e një klase të përgjithshme ekuacionesh diferenciale jolineare janë të vazhdueshme , të kufizuara dhe disa nga kushtet e domosdoshme që zgjidhjet të konvergjojnë në zero.

Në fund shqyrtohet një zbatim i zgjidhjeve oshiluese në teorinë e levizjeve .

Përmbajtja

1.Parathënia 5

2.Simbolika 9

3.Hyrje 11

4.Pohime ndihmëse 13

5.Teorema krahasuese e Shturmit për ekuacionin diferencial të rendit të dytë 18

6. Kritere oshiluese të ekuacioneve diferenciale lineare të rendit të dytë 21

7. Kritere oshiluese të ekuacionit diferencial të rendit të dytë 25

8.Oshilacioni te ekuacioni gjysmë-linear diferencial i rendit të dytë 32

9.Teorema oshilacioni te ekuacioni diferencial jolineare i rendit të dytë 49

10. Kritere oshilacioni për ekuacionin diferencial jolinear të rendit të dytë me kufizë që shuhet 66

11.Kritere oshiluese për ekuacionin diferencial të turbulluar 84

12. Vazhdueshmëria dhe kufizueshmëria e zgjidhjeve oshiluese te ekuacionet diferenciale të rendit të dytë 95

13.Zbatim i zgjidhjeve oshiluese të ekuacionit diferencial të rendit të dytë 104

14.Literatura 108

Simbolika

Ne shtjellimin e temes do te përdorim shenimet :

$N = \{1,2,3,...\}$, bashkësia e numrave natyrorë,

$\Re = (-\infty, \infty)$, bashkësia e numrave realë,

$\Re_0 = [0, \infty)$,bashkësia e numrave realë jonegativë,

$\Re^+ = (0, \infty)$, bashkësia e numrave realë pozitivë,

$\Re^- = (-\infty, 0)$, bashkësia e numrave realë negativ ,

$x \in A$, x i takon bashkësisë A

$x \notin A$, x nuk i takon bashkësisë A

$A \subset B$, A është nënbashkësi e bashkësisë B

$I = (a,b)$, intervali i hapur real

$C(I \times \Re^m, \Re)$, hapsira e funksioneve të vazhdueshme nga $I \times \Re^m$ në $\Re$

$C^k(I \times \Re^m, \Re)$, hapsira e funksioneve me derivat të rendit k–të të vazhdueshëm.

$C[a,b]$, hapsira e funksioneve reale të vazhdueshme f në segmentin $[a,b]$.

$$\|x\|_p = \left(\int_a^b |x(t)|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \ , \ x \in C[a,b], \ 1 \le p < \infty ,$$

është përkufizuar normë në hapsirën $C[a,b]$.

$C_p[a,b]$, hapsira e funksioneve $C[a,b]$ me normën $x \mapsto \|x(t)\|_p$,

$\int_a^b f(x)dx$, integrali i Rimanit për funksionin *f* në kufijtë prej *a* deri në *b*

$\sup A$, suprimumi i bashkësisë A

$\inf A$, infimumi i bashkësisë A

$\max f(x)$, maksimumi i funksioni *f(x)*

$\min f(x)$, minimumi i funksionit *f(x)*

$\{a_n\}$, vargu i numrave a_n, $n \in N$

$\lim_{n\to\infty} a_n$, limiti i vargut $\{a_n\}$

$\tau^+(t)$, shënojmë $\max\{\tau(t),0\}$

1.Hyrje

Konsiderojmë ekuacionin diferencial të rendit të dytë në formë implicite

$$F(t, x(t), x'(t), x''(t)) = 0 \qquad (1.1)$$

ku $F \in C([t_0, \infty) \times \Re^3, \Re)$.

Zgjidhje të ekuacionit (1.1) nënkuptohet funksioni *x(t)* , $t \in [t_x, \infty) \subset [t_0, \infty)$, i cili ka derivate deri te rendi i dytë të vazhdueshëm dhe e plotëson ekuacionit (1.1) në intervalin $[t_x, \infty)$, ku $t_x \geq t_0 > 0$, për dallim nga rastet kur intervali i zgjidhjes kushtëzohet edhe në pjesët tjera të boshtit real.

Për zgjidhjen jo të zakonshme *x(t)* të ekuacionit (1.1) konsiderohet se është oshiluese nëse ka një varg të pafundëm zerosh që tentojnë në pambarim d. m. th. nëse ekziston vargu $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$ i pikave të intervalit ashtu që $\lim_{n\to\infty} \tau_n = \infty$ dhe $x(\tau_n) = 0$ për $n \in N$. Për ndryshe *x(t)* quhet zgjidhje jooshiluese , d.m.th. *x(t)* është zgjidhje jooshiluese nëse ekziston $t_1 \geq t_0$, ashtu që për $t \geq t_1$, kemi $x(t) \neq 0$, pra *x(t)* nuk ka zero në intervalin $[t_1, \infty)$. Me fjalë tjera zgjidhja jooshiluese në këtë interval është pozitive ose negative në tërë intervalin $[t_1, \infty)$. Për ekuacionin (1.1) themi se është oshilues , nëse të gjitha zgjidhjet e tij janë oshiluese.

Këtu do të paraqiten ekuacionet diferenciale të rendit të dytë të cilët në kushte të caktuara kanë zgjidhje oshiluese. Me këtë problematikë në dekadën e fundit janë marrë shumë autorë të cilët kanë përcaktuar kritere që garantojnë zgjidhje oshiluese për ekuacionet e formave të ndryshme lineare gjysmë lineare dhe jolineare diferenciale të rendit të dytë , në kushte të caktuara. Për përcaktimin e intervaleve oshiluese d.m.th. në konstruktimin e kritereve oshiluese , përgjithësisht përdoren metoda krahasuese e Shturmit , metoda e përgjithësuar e Rikatit, involvimi i funksioneve pozitive të Philos, metoda e të mesmes integrale etj. të cilat detalisht do të ilustrohen në shtjellimin e temës. Konkretisht në këtë punim do të ilustrohen kritere mbi natyrën e oshilacionit për zgjidhjet e ekuacioneve diferenciale të rendit të dytë , duke u nisur nga rezultatet më të rendësishme të paraqitura nga autorë të ndryshëm për ekuacionin linearë (shih punimet [40], [27], [28], [10], [9] , etj), pastaj në këtë drejtim paraqiten teorema oshilacioni edhe për ekuacionet diferenciale gjysmë lineare të rendit të dytë (punimet [5], [30], [32], [37], [41], [49], etj.) , ku kam vërtetuar disa rezultate më të përgjithësuara për forma të caktuara,të cilat përfshijnë disa nga rezultatet tanimë të njohura si raste të veçanta . Duke u mbështetur në njohuritë e prezentuara në punimet [7], [14], [15], [16],[26], [43], [47], etj. për të ahtuquajturin ekuacion diferencial jolinear i rendit të dytë, me kufizë që shuhet , kam shqyrtuar zgjidhjet oshiluese të një forme të caktuar dhe në këtë drejtim kam vërtetuar disa teorema duke përdorur metodën e Rikatit të cilat do të paraqiten në vazhdim. Një aspekt tjetër që dallon në koeficientët e ekuacionit , janë edhe ekuacionet diferenciale të turbulluara të rendit të dytë, ku kam kontribuar në paraqitjen e disa kritereve që përcaktojnë oshilacionin e zgjidhjeve të tyre (punimet [4], [19], etj.) .

Në shtjellimin e temës rëndësi më të madhe i kushtohet zgjidhjeve oshiluese si dhe disa kritere bazë që garantojnë zgjidhje oshiluese të ekuacionit diferencial të rendit të dytë të formave të caktuara si dhe kushteve kur zgjidhjet e ekuacionit diferencial janë të kufizuara dhe të pa kufizuara.

2. Pohime ndihmëse

Këtu do të paraqiten disa teorema , lema bazë si dhe rezultate me rëndësi nga disa autorë në teorinë e oshilacionit për ekuacionin diferencial të rendit të dytë të cilat rezultate do të përdoren në vazhdim. Vlen të ceket se kontributi në këtë pjese eshte vërtetimi i rrjedhimit 1. Në fillim paraqesim inekuacionin e njohur të Hollderit dhe të Minkovskit pastaj shkurtimisht disa kritere të oshilacionit dhe jooshilacionit të ekuacionit diferencial të rendit të dytë të paraqitur nga disa autorë viteve të fundit.

Teorema 2.1 (Jobarazimi i Hollderit): Për $1 < p < \infty$ dhe për funksionet $x, y \in C[a,b]$, vlen jobarazimi

$$\int_a^b |x(t)y(t)|dt \le \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |y(t)|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

ku $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Vërejmë se për $p=2$, kemi $q=2$, inekuacioni i Hollderit kthehet në inekuacionin e Bunijakowsky- Schwartz-it

$$\left(\int_a^b |x(t)y(t)|dt\right)^2 \le \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt\right)\left(\int_a^b |y(t)|^2\right).$$

Nëse funksionet $x(t)$, $y(t)$ janë pozitive dhe të vazhdueshme në segmentin $[a,b]$, atëherë , vlen

$$\left(\int_a^b x(t)y(t)dt\right)^2 \le \left(\int_a^b x^2(t)dt\right)\left(\int_a^b y^2(t)dt\right).$$

Teorema 2.2 (Minkowskit): Për $1 \le p < \infty$ dhe funksionet $x, y \in C[a,b]$, vlen

$$\left(\int_a^b |x(t)+y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Në ndërtimin e disa kritereve oshiluese me të cilat do të njihemi më vonë , përdoret jobarazimi i cili vlen për funksionet pozitive të cilin e paraqesim në vazhdim.

Lema 2. 1[5]. Nëse X dhe Y janë funksione jonegativë , atëherë vlen

$$X^{y} + (\gamma - 1)Y^{y} - \gamma X Y^{\gamma-1} \ge 0, \quad \gamma > 1$$

ku barazimi qëndron nëse dhe vetëm nëse $X = Y$.

Shpesh në shtjellimin e temës do të përdorim inekuacionin :

Lema 2.2[5] (jobarazimi i Gronwall's-it). Le të jetë $I = [t_0, T)$, interval i numrave real. Supozojmë, nëse

$$u(t) \le c + \int_{t_0}^{t} q(s)u(s)ds \ , \text{ për } \ t \in I$$

ku c konstantë jonegative dhe $u, q \in C(I, R^{+})$, atëherë vlenë

$$u(t) \le c\exp(\int_{t_0}^{t} q(s)ds\,, \text{ për } t \in I\,.$$

Në vazhdim do të paraqesim lemën e Wong e cila përcakton një relacion shumë të rëndësishëm mes zgjidhjes *x(t)* dhe derivatit të tij *x'(t)* i cili kusht përdoret nga shumë autorë në ndërtimin e kritereve të oshilacionit te ekuacionet diferenciale të rendit të dytë gjë që haset edhe në shtjellimin e temës.

Është fjala për ekuacionin e formës

$$(r(t)x'(t))' + q(t)g(x(t)) = 0 \tag{2.1}$$

për cilin , autori në [59] paraqet këtë rezultat për zgjidhjet joooshiluese :

Lema 2. 3[59]. Le të jetë

$$\liminf_{t\to\infty} \int_T^t q(s)ds \geq 0, \text{ për } T \text{ mjaft të madh }, \qquad (2.2)$$

atëherë çdo zgjidhje jooshiluese e (2.1) e cila nuk është konstantë duhet të plotësojë kushtin $x(t)x'(t) > 0$, për t mjaft të madh.

Meqë jemi përqëndruar në teoremat e oshilacionit , gjegjësisht të jooshilacionit , në vijim paraqesim disa nga rezulatatet më të rendësishme për disa nga ekuacionet bazë diferenciale të rendit të dytë .

Në [30] autori tregon se (2.1) është oshilues nëse ekziston funksioni konkav pozitiv $\rho \in \Re_+$ ashtu që

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t^\beta} \int_{t_0}^t (t-s)^\beta \rho(s) q(s) ds = \infty, \text{ për ndonjë } \beta \geq 1.$$

Mbi oshilacionin e ekuacionit më të përgjithësuar të formës

$$x''(t) + q(t) g(x(t), x'(t)) = 0 \qquad (2.3)$$

Bihari në [60] vërteton : nëse *q(t)>0* për çdo $t \geq t_0$ dhe

$$\lim_{t\to\infty} \int_{t_0}^t q(s)ds = \infty$$

atëherë çdo zgjidhje e ekuacionit (2.3) është oshiluese.

Për ekuacionin

$$(a(t)u'(t))' + q(t)u(t) = 0 \qquad (2.4)$$

ku $a(t) \in C^1([t_1, t_2], R^+)$ dhe $q(t) \in C([t_1, t_2], R)$ në [8] është prezentuar kriter verifikues për zgjidhjet jooshiluese i cili jepet me anë të kësaj :

Teorem 2. 4[8]. : Ekuacioni (2.4) është jooshilues nëse dhe vetëm nëse ekziston $T > t_0$ dhe funksioni $h(t) \in C^1([T, \infty), R)$, i cili e plotëson inekuacionin

$$q(t) + a(t)h^2(t) - (a(t)h(t))' \leq 0 \text{ , për } t \geq T .$$

Duke u bazuar në këtë teoremë në kushte më të përgjithësuara mund të vërehet se është i vërtetë :

Rrjedhim 2.1[11] . Nëse $a'(t) \le 0$, për $t \ge t_0$, $l(t) \ge 1$, për $t > T$ dhe

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{t^2 l(t) q(t)}{a(t)} < \frac{1}{4}, \tag{2.5}$$

atëherë ekuacioni (2.4) është jooshilues.

Vërtetim: Me të vërtet nga (2.5) ekzistojnë numrat $T \ge t_0$ dhe $c < \frac{1}{4}$ ashtu që

$$\frac{t^2 q(t) l(t)}{a(t)} \le c \text{, prej nga } q(t) \le \frac{ca(t)}{t^2 l(t)} \text{ për } t \ge T .$$

Le të marrim $h(t) = -\frac{1}{2t}$, atëherë

$$q(t) + a(t)h^2(t) - (a(t)h(t))' \le$$

$$\le \frac{ca(t)}{t^2 l(t)} + \frac{a(t)}{4t^2} - \frac{a'(t)}{-2t} - \frac{a(t)}{2t^2} \le \frac{ca(t)}{t^2} + \frac{a(t)}{4t^2} + \frac{a'(t)}{2t} - \frac{a(t)}{2t^2} =$$

$$= a(t)\frac{4c-1}{4t^2} - a'(t)h(t) \le 0 \text{ ,për } t \ge T .$$

Shpesh në shqyrtim të oshilacionit të zgjidhjeve haset edhe ekuacioni diferencial i formës

$$v'(t) + f'(x(g(t))g'(t)v^2(t) + p(t)v(t) + q(t) = 0$$

prej të cilit fitohet ekuacioni diferencial i rendit të dytë me anëtarë që shuhet

$$x''(t) + p(t)x'(t) + q(t) f(x(g(t)) = 0 \tag{2.6}$$

duke përdor zëvendësimin

$$v(t) = \frac{x'(t)}{f(x(g(t))}$$

që është pjesë e studimit në vazhdim në kushte të caktuara.

Në një këndvështrim tjetër ekuacioni i formës

$$x''(t)+p(t)x'(t)+q(t)x(t)=0 \qquad (2.7)$$

me zëvendësimin

$$x(t)=u(t)e^{-\frac{1}{2}\int p(s)ds}$$

merr formën

$$u''(t)+(q(t)-\frac{p'(t)}{2}-\frac{p^2(t)}{4})u(t)=0$$

i cili poashtu përdoret në konstruktimin e kritereve oshiluese për ekuacionet diferenciale me kufizë shuarje (2.6) dhe (2.7).

3. Teorema krahasuese e Shturmit

Metodë sipas të cilës mund të përcaktohet zero e zgjidhjes së ekuacionit diferencial të rendit të dytë në një interval të caktuar është e ashtuquajtura metoda e Shturmit. Mënyra e përcaktimit bazohet në kushtet fillestare dhe krahasuese të koeficientëve të dy barazimeve të formës së njëjtë të cilët dallojnë për nga koeficienti pranë *x(t)* , *y(x)* përkatësisht sic vërehet në vazhdim.

Marrim në konsiderate ekuacionet diferenciale të rendit të dytë

$$x''(t) + q(t)x(t) = 0 \qquad (3.1)$$

dhe

$$y''(t) + q_1(t)y(t) = 0 \qquad (3.2)$$

të cilët dallohen sipas koeficientëve pranë *x(t)* dhe *y(t)* . Atëherë në kushte të caktuara tregohet natyra e zgjidhjes së ekuacionit (3.2) në një interval të dhënë.

Teorema 3.1[8]: Le të jenë *x(t)* dhe *y(t)* zgjidhje jotriviale të ekuacioneve

$$x''(t) + q(t)x(t) = 0$$

dhe

$$y''(t) + q_1(t)y(t) = 0$$

respektivisht në një interval $[t_1, t_2] \subseteq \Re$. Supozojmë se $x(t_1) = x(t_2) = 0$,

$q(t),\ \ q_1(t) \in C([t_1, t_2], \Re)$ dhe plotësojnë $q_1(t) \geq q(t),\ (q_1(t) \neq q(t))$ në $[t_1, t_2]$.

Atëherë *y(t)* duhet të ndërroj shenjë në (t_1, t_2).

Metoda standarde e vërtetimit bazohet në Wronskianin (shih fq. 29 [29]) d.m.th. meqë

vlen

$$\frac{d}{dt}(y(t)x'(t)-x(t)y'(t)) = y(t)x''(t)-x(t)y''(t) = (q_1(t)-q(t))x(t)y(t)\,,$$

prej nga nëse integrojmë nga t_1 deri në t_2

$$(y(t)x'(t)-x(t)y'(t))\Big|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2}[q_1(s)-q(s)]x(s)y(s)ds\,,$$

fitojmë kontradicionin e dëshiruar të supozimit që $x(t)>0$ dhe $y(t)>0$ në

intervalin (t_1,t_2).

Ky rezultat mund të shtrihet edhe për zgjidhjet e ekuacionit diferencial më të

përgjithësuar

$$(a(t)x'(t))'+q(t)x(t)=0$$

dhe

$$(a(t)y'(t))'+q_1(t)y(t)=0\ ,$$

ku $a(t)\in C^1([t_1,t_2],\Re^+)$ dhe $q(t)$, $q_1(t)\in C([t_1,t_2],\Re)$.

Në të vërtet për të vërtetuar këtë , duhet të përdorim identitetin e Shturmit

$$\frac{d}{dt}(y(t)a(t)x'(t)-x(t)a(t)y'(t)) = y(t)x''(t)-x(t)y''(t) = (q_1(t)-q(t))x(t)y(t)$$

Megjithë këtë ,na duhet të krahasojmë zgjidhjet e ekuacioneve

$$(a(t)x'(t))'+q(t)x(t)=0 \qquad (3.3)$$

dhe

$$(a(t)y'(t))'+q_1(t)y(t)=0\ , \qquad (3.4)$$

ku $a(t),a_1(t)\in C^1([t_1,t_2],\Re^+)$ dhe $q(t)$, $q_1(t)\in C([t_1,t_2],\Re)$ nën hipotezën

$q_1(t)\ge q(t)$, $(q_1(t)\ne q(t))$, në $[t_1,t_2]$, $a(t)\ge a_1(t)$, (3.5) atëherë identite i Shturmit do të ketë formën

$$\frac{d}{dt}(y(t)a(t)x'(t)-x(t)a(t)y'(t))=(q_1(t)-q(t))x(t)y(t)+(a(t)-a_1(t))x'(t)y'(t)$$

i cili nuk është i plotfuqishëm për derisa nuk janë të njohura shenjat e $x'(t)$ dhe $y'(t)$.

Mirëpo , nëse $y(t)\neq 0$, atëherë ky identitet modifikohet nga Pikone [8] në formën

$$\frac{d}{dt}(\frac{x(t)}{y(t)}(y(t)a(t)x'(t)-x(t)a_1(t)y'(t))=$$

$$=(q_1(t)-q(t))x(t)y(t)+(a(t)-a_1(t))(x'(t))^2+a_1(t)(x'(t)-\frac{x(t)}{y(t)}y'(t))^2, \quad (3.6)$$

i cili jep një rezultat më të pëgjithësuar.

Me të vërtet , nëse $x(t_1)=x(t_2)=0$, $y(t)>0$ në $[t_1,t_2]$ dhe vlen (3.5) ,nëse integrohet (3.6) nga t_1 deri në t_2 arrijm në kundërshtimin e dëshiruar. Identiteti i Picones ofron një dëshmi elementare , por vërtetim rigoroz të teoremës së Shturmit. Prandaj ky rezultat është i njohur si teorema e Shturm – Picone.

4.Kritere oshiluese të ekuacioneve diferenciale lineare të rendit të dytë

Do të paraqesim ekuacionin linear diferencial të rendit të dytë, duke cituar disa kritere bazë në teorinë e oshilacionit të cilat më vonë janë si raste të veçanta të ekuacioneve diferenciale gjysmë - lineare , superlineare dhe jolineare të rendit të dytë.

Për ekuacionin diferencial linearë të rendit të dytë të formës

$$x''(t) + q(t)x(t) = 0 \tag{4.1}$$

prezentojmë në vazhdim inekuacionin ndihmës të Liapunovit një relacion mbi integralin e caktuar të koeficientit *q(t)* me kufij, zerot e njëpasnjëshme të zgjidhjes së ekuacionit (4.1) i cili inekuacion më vonë përdoret shpesh nga autorët e tjerë në studimin e zgjidhjeve oshiluese dhe jooshiluese te ekuacionet diferenciale të rendit të dytë :

Teorema 4.1[8]: Le të jetë $q(t) \in C((a,b),\Re^{+})$ jo identikisht zero në ndonjë nënbashkësi të hapur të (a,b). Supozojmë se *x(t)* është zgjidhje jotriviale e ekuacionit (4.1) i cili ka zero të njëpasnjëshme $t = a$ dhe $t = b$.

Atëherë është i vërtet inekuacioni

$$(a-b)\int_a^b q(s)ds > 4 .$$

Meqë punimi i kushtohet zgjidhjeve oshiluese të ekuacioneve diferenciale të rendit të dytë , në vijim shkurtimisht do të paraqesim disa pohime bazë që kanë të bëjnë me zgjidhjet jooshiluese të ekuacionit diferencial të rendit të dytë të një forme të caktuar.

Studimi i natyrës oshiluese dhe jooshiluese në zgjidhjet e ekuacionit diferencial të rendit të dytë, mori hov në gjysmën e dytë të shekullit XX. Kështu duke u nisur nga ekuacioni konkret

$$y''+\frac{\gamma}{x^2}y=0$$

i cili është oshilues për $\gamma > \frac{1}{4}$, kurse jooshilues për $\gamma \le \frac{1}{4}$, Einar Hille (fq. 234 [27])

në studimin e ekuacionit të përgjithshëm linear diferencial të rendit të dytë (4.1)

ku *p(x)* është funksion i vazhdueshëm pozitiv në intervalin $(0,\infty)$,duke përdor funksionin *g(x)* të përkufizuar me

$$g(x)=x\int_x^\infty p(x)dx$$

në shqyrtimin e zgjidhjeve oshiluese (këtu supozohet se integrali ekziston)

duke përdor madhësitë

$$g_* = \liminf_{x\to\infty} g(x)$$

dhe

$$g^* = \limsup_{x\to\infty} g(x)$$

tregon se $g_* \le \frac{1}{4}$, $g^* \le 1$, nëse (4.1) është jooshilues dhe $g^* \ge \frac{1}{4}$, nëse ekuacionit (4.1) është oshilues.

Poashtu Zeev Nehari në [28] për ekuacionin diferencial (4.1)

jep një kusht shumë të fuqishëm mbi zgjidhjet oshiluese dhe jooshiluese me anë të kësaj :

Teorema 4.2 [28] : Barazimi (4.1) është oshilues , atëherë dhe vetëm atëherë nëse:

$$\limsup_{x\to\infty} x\int_x^\infty p(x)dx=\infty \ .$$

Ekuacioni (4.1) është jooshilues , atëherë dhe vetëm atëherë nëse

$$\lim_{x\to\infty} x\int_x^\infty p(x)dx = \infty .$$

Vërtetimin e gjeni në 430 në [28].

Për ekuacionin (4.1) autori në [10] vërteton se është oshilues nëse *q(t)* >0 , për çdo $t \geq t_0$ dhe

$$\lim_{t\to\infty} \int_{t_0}^t q(s)ds = \infty .$$

Në vazhdim paraqesim disa kritere të njohura oshilacioni të ekuacionit (4.1) ku

$$q(t) \in C([t_0,\infty),\Re) .$$

Kështu Winter në [39] ka prezentuar një kriter thelbësor me anë të kësaj:

Teorema 4.3 [39]: Nëse vlen

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_{t_0}^t\int_{t_0}^s q(v)dvds = \infty ,$$

atëherë ekuacioni (4.1) është oshilues.

Më vonë i nxitur nga ky rezultat Winter në [39] për *q(t)* funksion i çfarëdoshëm vërteton se barazimi (4.1) është oshilues nëse

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_{t_0}^t (t-s)q(s)ds = \infty . \tag{4.2}$$

Në [38] autori tregon se limiti nuk mund të çvendoset nga ana e sipërme dhe se kusht i domosdoshëm për oshilim të zgjidhjeve të ekuacionit (4.1) paraqitet si mëposhtë.

Teorema 4.4 (Hartman)[58] : Kusht i domosdoshëm që ekuacioni (4.1) të jetë oshilues është

$$-\infty < \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_{t_0}^t\int_{t_0}^s q(\xi)d\xi ds < \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_{t_0}^t\int_{t_0}^s q(\xi)d\xi ds \leq \infty .$$

Në rrethana tjera poashtu tregohet se është i vërtet konkluzioni i paraqitur nga ana e Kamenev në :

Teorema 4.5 (Kamenev **)**[40]**:** Nëse për ndonjë numër $n > 1$, vlen

$$\lim_{t\to\infty}\sup\frac{1}{t^n}\int_{t_0}^{t}(t-s)^n q(s)ds = \infty \tag{4.3}$$

atëherë ekuacioni (4.1) është oshilues.

Për rastin kur kushti (4.3) nuk plotësohet, një pjesë të përgjigjes e gjejmë poashtu në :

Teorema 4.6 (Kamenev): Le të vlej

$$\lim_{t\to\infty}\sup\frac{1}{t^n}\int_{t_0}^{t}(t-s)^n q(s)ds < \infty,\ \text{për ndonjë}\ \ n > 1.$$

Nëse ekziston funksioni $\tau(t) \in C([t_0,\infty),\Re)$,

ashtu që

$$\lim_{t\to\infty}\inf\frac{1}{t^n}\int_{T}^{t}(t-s)^n q(s)ds \geq \tau(T),$$

për çdo $T \geq t_0$ dhe

$$\int_{t_0}^{\infty}(\tau^+(t))^2 dt = \infty,$$

ku $\tau^+(t) = \max\{\tau(t),0\}$, $t \geq t_0$,

atëherë ekuacioni (4.1) është oshilues.

5. Kritere oshiluese të ekuacionit diferencial të rendit të dytë

Teoria e oshilacionit për një ekuacion më të përgjithësuar diferencial të rendit të dytë ka qenë temë hulumtimi e shumë autorëve në gjysmë-shekullin e kaluar dhe në fillim të këtij shekulli . Një pjesë të këtyrë rezultateve të arritura do të paraqiten edhe këtu.

Është fjala për disa kritere të njohura oshilacioni për ekuacionin diferencial të rendit të dytë të formës

$$(a(t)x'(t))'+q(t)f(x(t))=0 \qquad (5.1)$$

të cilat rezultate do t'i përdorim për konstruktimin e disa kritereve të reja më të përgjithësuara , ku $a(t)\in C([t_0,\infty),\Re^+)$, $q(t)\in C([t_0,\infty),\Re)$, për $t_0\geq 0$ dhe $f\in C(\Re,\Re)$.

Gjithashtu mbështetemi në kushtet

i) $\int^{\infty}\frac{ds}{a(s)}=\infty$

dhe

ii) $xf(x)>0$ dhe $f'(x)\geq 0$, për $x\neq 0$.

Disa nga kushtet që ekuacioni (5.1) të jetë oshilues jepen në këtë teoremë:

Teorema 5. 1 [42] : Nëse vlenë i) , ii) dhe

$$\int^{\infty}q(s)ds=\infty \qquad (5.2)$$

atëherë ekuacioni (5.1) është oshilues.

Me fjalë tjera këtu vërehet se funksioni *a(t)* i cili është pozitiv nga kushti *i)* implikon që ai të tentoj në zero kur $t \to \infty$, kurse nga kushti *ii)* vërehet se $q(t) \to \infty$, kur $t \to \infty$.

Këtu paraqesim vërtetimin në tërësi të kësaj teoreme sepse pjesë nga ky vërtetim përdoren në shtjellimin e temës në vazhdim.

Vërtetim : Me të vërtetë ,nisemi nga e kundërta , rrjedhimisht se zgjidhja *x(t)* e ekuacionit (5.1) është jooshiluese, d.m.th. $x(t) \neq 0$ për $t \geq t_1 \geq t_0$.

Në vazhdim përdorim metodën e njohur të Rikatit pra, përkufizojmë funksionin

$$w(t) = \frac{a(t)x'(t)}{f(x(t)}, \text{ për } t \geq t_1$$

nëse derivojmë , kemi

$$w'(t) = -q(t) - \frac{f'(x(t))}{a(t)} w^2(t) \leq -q(t) \tag{5.3}$$

Integrojmë ekuacionin e fundit prej t_1 deri t dhe marrim

$$w(t) \leq w(t_1) - \int_{t_1}^{t} q(s)ds,$$

ose

$$\frac{a(t)x'(t)}{f(x(t))} \leq w(t_1) - \int_{t_1}^{t} q(s)ds.$$

Mbetet të shqyrtojmë rastet $x(t) > 0$ dhe $x(t) < 0$. Supozojmë se $x(t) > 0$, rrjedhimisht edhe $f(x(t) > 0$ nga kushtet e teoremës për $t \geq t_1$. Nga kushti (5.2) konkludojmë se ekziston $t_2 \geq t_1$, ashtu që $x'(t) < 0$, për $t \geq t_2$. Në anën tjetër poashtu nga kushti (5.2) i teoremës rrjedh se ekziston $T \geq t_2 \geq t_1$, ashtu që

$$\int_{t_2}^{T} q(s)ds = 0 \text{ dhe } \int_{T}^{t} q(s)ds \geq 0 \text{ , për } t > T.$$

Nëse ekuacionin (5.1) e integrojmë me pjesë prej T deri t , do të kemi

$$a(t)x'(t) = a(T)x'(T) - \int_T^t q(s)f(x(s)ds$$

$$= a(T)x'(T) - f(x(t))\int_T^T q(s)ds + \int_T^t f'(x(s(t))x'(s)\left(\int_T^t q(u)du\right)ds \leq a(T)x'(T)\ .$$

sepse

$$f(x(t))\int_T^T q(s)ds \geq 0\ ,$$

kurse

$$\int_T^t f'(x(s(t))x'(s)\left(\int_T^t q(u)du\right)ds \leq 0\ .$$

Tani, nëse relacionin

$$x'(t) \leq \frac{a(T)x'(T)}{a(t)}$$

e integrojmë nga T deri t fitojmë

$$x(t) \leq x(T) + a(T)x'(T)\int_T^t \frac{ds}{a(s)} \to -\infty\ ,\ \text{kur}\ \ t \to \infty\ ,$$

që është në kundërshtim me supozimin tonë . Në mënyrë të ngjashme diskutohet edhe

për rastin $x(t)<0$.

Në ë8ç autori për ekuacionin (5.1) nën kushtet

i) $a(t) \in C([t_0,\infty),\Re^+)$

ii) $p(t), q(t) \in C([t_0,\infty),\Re)$,

iii) $f \in C(\Re,\Re)$, funksion me derivat të vazhdueshëm përveç në 0, dhe plotëson

$xf(x) > 0$ dhe $f'(x) \geq 0$, për $x \neq 0$ (5.4)

gjithashtu *f(x)* është rreptësisht suoerlinearë në kuptimin se

$$\int^{\infty} \frac{du}{f(u)} < \infty \quad \text{dhe} \quad \int^{-\infty} \frac{du}{f(u)} < \infty \tag{5.5}$$

Për zgjidhjet oshiluese të ekuacionin diferencial (5.1) nëse nuk plotësohet kushti tani

më i njohur $\int_{t_0}^{\infty} q(s)ds = \infty$, atëherë është e nevojshme të plotësohet kushti

$\lim_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} \frac{1}{a(s)} \int_{t_0}^{\infty} q(s)ds = \infty$, i cili është një relacion ku poashtu involvohet integrali

karakteristik i formës $\int_{t_0}^{\infty} q(s)ds$ të cilin e hasim në shumë pohime të cilat flasin për

zgjidhjet oshiluese të ekuacionit (5.1).

Teorema 5.2 [8] . Supozojmë se vlen (5.4) dhe (5.5),

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{a(s)} ds = \infty \tag{5.6}$$

$$\int_{t_0}^{\infty} q(s)ds < \infty \tag{5.7}$$

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{T}^{t} q(s)ds \geq 0 \text{ , për çdo të mjaft të madh} \tag{5.8}$$

dhe

$$\lim_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} \frac{1}{a(s)} \int_{t_0}^{\infty} q(s)ds = \infty \tag{5.9}$$

atëherë ekuacioni (5.1) është oshilues.

Nëse në ekuacionin (5.1) marrim kushtin *a(t)* funksion i kufizuar d.m.th. $a(t) \leq a$, për

$t \geq t_0$, ku a konstantë pozitive , atëherë plotësohet kushti $\int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{a(t)}dt > \int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{a}dt = \infty$ dhe në

këtë përmbajtje vërtetohet kjo teoremë:

Teorema 5.3 [8]. Le të jetë $a(t) \le a_1$, $t \ge t_0$, ku a_1 është një konstantë pozitive dhe vlen kushti (5.5) . Nëse për çdo T mjaft të madh , ekziston $T_1 \ge T$, ashtu që

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{T_1}^{t} \int_{T}^{\infty} q(u)du > -\infty \tag{5.10}$$

dhe

$$\int_{t_0}^{\infty} sq(s)ds = \infty \tag{5.11}$$

atëherë ekuacioni (1) është oshilues.

Në vijim prezentohet teorema e cila sjell të involvuara kushtet e teoremës 1. në një formë tjetër .

Teorema 5.4 [8]: Nëse

$$\int^{\infty} \left(\int_{t_0}^{s} a(u)du \right)^{-1} ds = \infty \tag{5.12}$$

dhe

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{s} q(u)duds = \infty \tag{5.13}$$

atëherë ekuacioni (5.1) është oshilues.

Tani, në ekuacionin (5.1) nëse marrim $a(t) = 1$ dhe $f(x) = x$, vërehet se teoremat 3 dhe 4 të prezentuara më lartë mbulojnë kushtet e teoremës së Winterit (shih [39] për zgjidhjet oshiluese të ekuacionit diferencial të rendit të dytë , sepse plotësohet edhe kushti $\int_{t_0}^{\infty} ds = \infty$ që është kushti *i)* i cekur më lartë.

Vërtetim : Le të jetë *x(t)* zgjidhje jooshiluese e ekuacionit (5.1). Supozojmë se *x(t)>0* , për $t > t_0 > 0$. Përkufizojmë funksionin

$$w(t) = \frac{a(t)x'(t)}{x(t)}, \text{ për } t > t_0 .$$

Nëse derivojmë ekuacionin e fundit , marrim

$$w'(t) = -q(t) - \frac{1}{a(t)} w^2(t), \text{ për } t > t_0 . \tag{5.14}$$

Në vazhdim nëse integrojmë dy herë ekuacionin (5.14) prej t_0 deri t , kemi

$$\int_{t_1}^{t} w(s)ds + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} \frac{w^2(u)}{a(u)} du = t(w(t_0) - \frac{t_0 w(t_0)}{t} - \frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} q(u)duds)$$

nga kushti (5.13) , ekziston $t_1 \geq t_0$, ashtu që për $t \geq t_1$ të vlej

$$\int_{t_1}^{t} w(s)ds + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} \frac{w^2(u)}{a(u)} du < 0$$

tani për $t \geq t_1$, kemi $F(t) = \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} \frac{w^2(u)}{a(u)} du < -\int_{t_0}^{t} w(s)ds$.

Meqë *F(t)* është funksion jonegativ , kemi

$$F^2(t) < (\int_{t_0}^{t} w(s)ds)^2 .$$

Nga ekuacioni i Schwartz-it , marrim

$$(\int_{t_0}^{t} w(s)ds)^2 = (\int_{t_0}^{t} \sqrt{a(s)} \frac{w(s)}{\sqrt{a(s)}} ds)^2 \leq \left(\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right)\left(\int_{t_0}^{t} \frac{w^2(s)}{a(s)} ds\right), \text{ për } t \geq t_1 .$$

Nga përkufizimi i funksionit jonegativ *F(t)* vërejmë se ekziston $t_2 \geq t_1$, ashtu që për

$t \geq t_2$, vlen $F(t) > 0$.

Pra,

$$F^2(t) < \left(\int_{t_0}^{t} w(s)ds\right)^2 \leq \left(\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right)\left(\int_{t_0}^{t} \frac{w^2(s)}{a(s)} ds\right)$$

prej nga

$$\left(\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right)^{-1} \leq \frac{F'(t)}{F^2(t)}, \text{ për } t \geq t_2 . \tag{5.15}$$

Integrohet (5.7) prej t_2 deri në t, fitojmë

$$\int_{t_2}^{t} \left(\int_{t_0}^{s} a(u)du\right)^{-1} ds \leq \int_{t_2}^{t} \frac{F'(s)}{F^2(s)}ds = -\frac{1}{F(t)}\bigg|_{t_2}^{t} = -\frac{1}{F(t)} + \frac{1}{F(t_2)} \leq \frac{1}{F(t_2)} < \infty$$

i cili është në kundërshtim me kushtin (5.12) të teoremës. Ngjashëm diskutohet edhe rasti për *x(t)<0*, rrjedhimisht teorema u vërtetua tërësisht.

6. Oshilacioni ne ekuacionet gjysmë-lineare diferenciale të rendit të dytë

Këtu do të prezentojmë kritere oshilacioni për ekuacionin diferencial gjysmë-linear të rendit të dytë i cili paraqitet si përgjithësim i ekuacionit linear . Në vitet e fundit këtij lloji ekuacioni i është kushtuar vëmendje e posaçme. Ne do të paraqesim disa forma ekuacionesh gjysmë lineare differenciale të rendit të dytë dhe do të paraqiten kriteret përkatëse si dhe do të bëhet krahasimi i rezultateve të arritura nga autorë të ndryshëm të kësaj fushe. Disa nga rezultatet e cekura në këtë kapitull paraqiten si raste të kritereve të cilat ndërtohen në pjesën shtatë dhe tetë.

Konsiderojmë ekuacionin diferencial të formës :

$$(r(t)\phi(x'(t))' + c(t)\phi(x(t)) = 0 \tag{6.1}$$

ku $r(t) \in C(t_0, \infty), \Re^+)$, $c(t) \in C([t_0, \infty), \Re)$ dhe funksioni realë $\phi : \Re \to \Re$ është i përkufizuar me $\phi(y) = |y|^{\alpha - 1} y$, ku $\alpha > 0$ është numër i caktuar. Nëse $\alpha = 1$, atëherë barazimi (1) reduktohet në ekuacionin linear diferencial të rendit të dytë

$$(r(t)x''(t) + q(t)x(t) = 0 . \tag{2}$$

Nën hipotezën se zgjidhja e ekuacionit (6.1) është funksioni real $x(t) \in C^{'}([t_0, \infty), \Re)$, atëherë nëse $x(t)$ është zgjidhje pozitive e (6.1) dhe gjithashtu rritës ose zvogëlues , atëherë ekuacioni (6.1) reduktohet në ekuacionin shume të njohur të Euler- Lagranzhit

$$(r(t)(x'(t)^{\alpha})' + c(t)x^{\alpha}(t) = 0 \tag{6.3}$$

ose

$$(r(t)(-x'(t)^{\alpha})' - c(t)x^{\alpha}(t) = 0 \tag{6.4}$$

përkatësisht.

Autorë në punimet [5], [38], [30],dhe [40] kanë studiuar natyrën oshiluese të ekuacionit (6.1) për rastin $r(t) = 1$, d.m.th. kanë paraqitur kritere oshiluese për ekuacionin

$$[\phi(u'(t))]' + c(t)\phi(u(t)) = 0 \tag{6.5}$$

Paraqesim inekuacionin e përgjithësuar të Liapunovit i cili vlen për ekuacionin diferencial gjysmë - linearë (6.5).

Teorema 6.1 [8]: Le të jetë $c(t) \in C([a,b],\Re_0)$, jo identikisht zero në ndonjë nënbashkësi të $[a,b]$. Supozojmë se *x(t)* është zgjidhje jotriviale e ekuacionit (6.5) që ka zero të njëpasnjëshme $t = a$ dhe $t = b$. Atëherë qëndron inekuacioni :

$$2^{\alpha+1} < (b-a)^{\alpha} \int_a^b c(s)ds .$$

Vërtetim : Pa humbur në parim , supozojmë se $u(t) > 0$ në (a,b). Le të jetë M maksimum i *u(t)* në segmentin $[a,b]$, i cili arrihet në ndonjë pikë me kordinatë $t_0 = a + \varepsilon(b-a)$, $0 < \varepsilon < 1$.

Atëherë , kemi

$$\phi(u'(a)) - \phi(u'(b)) = -\int_a^b \frac{d}{dt}\phi(u'(t))dt$$

$$= \int_a^b c(t)\phi(u(t)dt < M^{\alpha} \int_a^b c(t)dt . \tag{6.6}$$

Nga *u(t) >0* dhe $c(t) \geq 0$ rrjedh se *u(t)* është konkav. Tani mund të marrim

$$u'(a) \geq \frac{M}{\varepsilon(b-a)}, \text{ dhe } u'(b) \geq \frac{-M}{(1-\varepsilon)(b-a)}.$$

Nga $\phi(u) = |u|^{\alpha-1} u$, kemi

$$\phi(u'(a)) - \phi(u'(b)) = \frac{M^{\alpha}}{(b-a)^{\alpha}} (\varepsilon^{-\alpha} + (1-\varepsilon)^{-\alpha})$$

Kjo dhe inekuacioni (6.6) implikojnë

$$\varepsilon^{-\alpha} + (1-\varepsilon)^{-\alpha} < (b-a)^{\alpha} \int_a^b c(t)dt .$$

Në intervalin *(0,1)*, funksioni $\varepsilon^{-\alpha} + (1-\varepsilon)^{-\alpha}$ ka maksimum $2^{\alpha+1}$, i cili arrihet për

$\varepsilon = \frac{1}{2}$.

Prandaj

$$2^{\alpha+1} < (b-a)^{\alpha} \int_a^b c(t)dt$$

që vërteton edhe teoremën.

Në vazhdim japim disa kritere oshilacioni për ekuacionin (6.1) .

Teorema 6.2 [5] : Le të jetë $D_0 = \{(t,s) : t > s \geq t_0\}$ dhe $D = \{(t,s) : t \geq s \geq t_0\}$.

Supozojmë se $H \in C(D; \Re)$ plotëson kushtet

i) $H(t,t) = 0$, për $t \geq t_0$, $H(t,s) > 0$, për $t > s \geq t_0$;

ii) H është funksion i vazhdueshëm dhe me derivat parcial jopozitiv në D_0 në respekt të ndryshores së dytë.

Poashtu supozojmë se $h : D_0 \to \Re$, është funksion i vazhdueshëm ashtu që

$$\frac{\partial H(s,t)}{\partial s} = h(t,s)[H(t,s)]^{\frac{1}{q}}, \text{ për çdo } (t,s) \in D_0$$

dhe

$$\int_{t_0}^{t} h^p(t,s)ds < \infty, \text{ për çdo } t \geq t_0, \tag{6.7}$$

ku

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Nëse

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t}\{H(t,s)c(s)-(\frac{1}{p}h(t,s))^{p}\}ds=\infty \tag{6.8}$$

atëherë ekuacioni (6.1) është oshilues.

Vërtetimin i kësaj teoreme është në [5] faqe 573.

Në këtë vazhdë për zgjidhjet oshiluese të ekuacionit (6.1) vlen :

Teorema 6.3 [5] : Le të plotësojnë H dhe h kushtet e teoremës 1. dhe le të vlej

$$0<\inf_{s\ge t_0}\{\liminf_{t\to\infty}\frac{H(t,s)}{H(t,t_0)}\}\le\infty \tag{6.9}$$

dhe

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t}h^{p}(t,s)ds<\infty. \tag{6.10}$$

Supozojmë se ekziston funksioni $A\in C[t_0,\infty)$, ashtu që

$$\int_{t_0}^{\infty}A_{+}{}^{p}(s)ds=\infty \tag{6.11}$$

dhe

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,T)}\int_{T}^{t}\{H(t,s)c(s)-(\frac{1}{p}h(t,s))^{p}\}ds\ge A(T)\text{, për çdo } T\ge t_0, \tag{6.12}$$

ku $A_{+}(s)=\max\{A(s),0\}$, $s\ge t_0$. Atëherë ekuacioni (6.5) është oshilues.

Vërtetim **:** Le të jetë *u(t)* zgjidhje jooshiluese e ekuacionit (6.5) . Pa humbur në përgjithësimin e teoremës mund të supozojmë se $u(t)>0$ në $[T_0,\infty)$, për $T_0\ge t_0$.

Përkufizojmë funksionin ndihmës

$$v(t)=\frac{\phi(u'(t))}{\phi(u(t))},\ \text{për çdo}\ t\ge T_0.$$

Nëse derivojmë funksionin $v(t)$ dhe përdorim barazimin (6.5), fitojmë

$$v'(t)=-(p-1)|v(t)|^q-c(t),\ \text{për çdo}\ t\ge T_0.$$

Nëse shumëzojmë me H(t,s) anë për anë dhe integrojmë prej T deri në t, kemi

$$\frac{1}{H(t,T)}\int_T^t\left\{H(t,s)c(s)-(\frac{1}{p}H(t,s))^p\right\}ds=$$

$$v(T)-\frac{1}{H(t,T)}\int_T^t\{h(t,s)[H(t,s)]^{\frac{1}{q}}v(s)+(p-1)H(t,s)|v(s)|^q+(\frac{1}{p}h(t,s))^p\}ds$$

për $t>T>T_0$.

Rrjedhimisht

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,T)}\int_T^t\left\{H(t,s)c(s)-(\frac{1}{p}H(t,s))^p\right\}ds=v(t)-$$

$$-\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,T)}\int_T^t\{h(t,s)[H(t,s)]^{\frac{1}{q}}v(s)+(p-1)H(t,s)|v(s)|^q+(\frac{1}{p}h(t,s))^p\}ds,$$

për $T\ge T_0$.

Tani nga kushti (6.12) , marrim

$$v(t)\ge A(T)+\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,T)}\int_T^t\{h(t,s)[H(t,s)]^{\frac{1}{q}}v(s)+(p-1)H(t,s)|v(s)|^q+(\frac{1}{p}h(t,s))^p\}ds$$

për çdo $T\ge T_0$.

Kjo tregon se

$$v(t)\ge A(T)\tag{6.13}$$

dhe

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,T)}\int_T^t\{h(t,s)[H(t,s)]^{\frac{1}{q}}v(s)+(p-1)H(t,s)|v(s)|^q+(\frac{1}{p}h(t,s))^p\}ds<\infty,$$

për çdo $T \geq T_0$.

Shënojmë

$$f(t) = \frac{p-1}{H(t,T_0)} \int_{T_0}^{t} H(t,s)|v(s)|^q ds$$

dhe

$$g(t) = \frac{1}{H(t,T_0)} \int_{T_0}^{t} h(t,s)[H(t,s)]^{\frac{1}{q}} v(s) ds,$$

për çdo $t > T_0$.

Atëherë

$$\liminf_{t\to\infty} [f(t) + g(t)] =$$

$$= \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,T_0)} \int_{T_0}^{t} \{(p-1)H(t,s)|v(s)|^q + h(t,s)[H(t,s)]^{\frac{1}{q}} v(s)\} ds \leq$$

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,T_0)} \int_{T_0}^{t} \{(p-1)H(t,s)|v(s)|^q + h(t,s)[H(t,s)]^{\frac{1}{q}} v(s) + (\frac{1}{p} h(t,s)^p\} ds < \infty \quad (6.14)$$

Nga inekuacioni i fundit konkludojmë se

$$\int_{T_0}^{\infty} |v(s)|^q ds < \infty \quad (6.15)$$

sepse në të kundërtën , për

$$\int_{T_0}^{\infty} |v(s)|^q ds = \infty \quad (6.16)$$

nga inekuacioni (6.4) ekziston konstanta pozitive ε , ashtu që

$$\inf_{s\geq t_0} \{\liminf_{t\to\infty} \frac{H(t,s)}{H(t,t_0)}\} > \varepsilon > 0 . \quad (6.17)$$

Le të jetë η numër i çfarëdoshëm pozitiv .

Atëherë nga (6.16) , ekziston $T_1 > T_0$, ashtu që

$$\int_{T_0}^{t} |v(s)|^q ds \geq \frac{\eta}{\varepsilon}, \text{ për çdo } t \geq T_1.$$

Si pasojë e kësajë marrim

$$f(t) = \frac{p-1}{H(t,T_0)} \int_{T_0}^{t} H(t,s) d\int_{T_0}^{s} |v(\tau)|^q d\tau$$

$$= \frac{p-1}{H(t,T_0)} \int_{T_0}^{t} \left(\int_{T_0}^{s} |v(\tau)|^q d\tau \right) \left(-\frac{\partial H(t,s)}{ds} \right) ds$$

$$\geq \frac{p-1}{H(t,T_0)} \int_{T_1}^{t} \left(\int_{T_0}^{s} |v(\tau)|^q d\tau \right) \left(-\frac{\partial H(t,s)}{ds} \right) ds$$

$$\geq \frac{\eta(p-1)}{\varepsilon H(t,T_0)} \int_{T_1}^{t} \left(-\frac{\partial H(t,s)}{ds} \right) ds$$

$$\geq \frac{\eta(p-1) H(t,T_1)}{\varepsilon H(t,T_0)},$$

për çdo $t \geq T_1$.

Nga (6.17) gjendet $T_2 \geq T_1$, ashtu që

$$\frac{H(t,s)}{H(t,t_0)}\} \geq \varepsilon, \text{ për çdo } t \geq T_2$$

e cila implikon

$$f(t) \geq (p-1)\eta, \text{ për çdo } t \geq T_2.$$

Meqë η është i çfarëdoshëm , atëherë

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \infty. \tag{6.18}$$

Në vazhdim le të konsiderojmë vargun $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$, në intervalin (t_0, ∞) që plotëson

$$\lim_{t\to\infty} t_n = \infty$$

që plotëson

$$\lim_{t\to\infty}[f(t_n)+g(t_n)]=\lim\inf[f(t)+g(t)]. \tag{6.19}$$

Nga (6.14) implikon se ekziston konstanta M , ashtu që

$$f(t_n)+g(t_n)\le M\ ,\ \text{për}\ \ n=1,2,3,... \tag{6.20}$$

Për më shumë (6.18) siguron se

$$\lim_{t\to\infty} f(t_n)=\infty \tag{6.21}$$

dhe nga (6.20), marrim

$$\lim_{t\to\infty} g(t_n)=-\infty. \tag{6.22}$$

Atëherë nga (6.20) dhe (6.21) , fitojmë

$$1+\frac{g(t_n)}{f(t_n)}\le\frac{M}{f(t_n)}<\frac{1}{2},\ \text{për}\ \ n \text{ mjaft të mëdhenj.}$$

Tani

$$\frac{g(t_n)}{f(t_n)}<-\frac{1}{2}\ \ ,\ \text{për}\ \ n \text{ mjaft të mëdhenj.}$$

Inekuacioni i fundit dhe (6.22) , implikojnë

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|g(t_n)|^q}{f(t_n)}=\infty \tag{6.23}$$

Në anën tjetër , nga inekuacioni i Hollderit , kemi

$$|g(t_n)|^q=\left|\ \frac{1}{H(t_n,T_0)}\int_{T_0}^{t}h(t_n,s)[H(t_n,s)]^{\frac{1}{q}}v(s)ds\ \right|^q$$

$$\le\frac{1}{p-1}\{\frac{1}{H(t,T_0)}\int_{T_0}^{t_n}h^p(t_n,s)ds\}^{q-1}\{\frac{p-1}{H(t_nT_0)}\int_{T_0}^{t_n}\ H(t,s)|v(s)|^q ds\}$$

$$\le\frac{f(t_n)}{p-1}\{\frac{1}{H(t,T_0)}\int_{T_0}^{t_n}h^p(t_n,s)ds\}^{q-1}$$

për ndonjë numër pozitiv n .

Rrjedhimisht

$$\frac{|g(t_n)|}{f(t_n)} \le \frac{1}{p-1}\{\frac{1}{H(t_n,T_0)}\int_{T_0}^{t_n} h^p(t_n,s)ds\}^{q-1}\text{ , për } n \text{ mjaft të madh.}$$

Por, (6.17) siguron që

$$\frac{H(t,T_0)}{H(t,t_0)}\} \ge \varepsilon\text{ , për çdo } t \ge T_3.$$

Tani

$$\frac{H(t_n,T_0)}{H(t_n,t_0)}\} \ge \varepsilon\text{ , për } n \text{ mjaft të madh,}$$

prandaj

$$\frac{|g(t_n)|}{f(t_n)} \le \frac{1}{p-1}\{\frac{1}{\varepsilon H(t_n,T_0)}\int_{T_0}^{t_n} h^p(t_n,s)ds\}^{q-1}, \tag{6.24}$$

për n mjaft të madh.

Tani nga (6.23) dhe (6.24) , kemi

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{H(t_n,t_0)}\int_{t_0}^{t_n} h^p(t_n,s)ds = \infty. \tag{6.25}$$

Nga ekuacioni i fundit shkruajmë

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t_n,t_0)}\int_{t_0}^{t} h^p(t,s)ds = \infty$$

i cili është në kundërshtim me (6.5). Rrjedhimisht qëndron (6.15).

Përfundimisht nga (6.13) marrim

$$\int_{T_0}^{\infty} A^q{}_+(s)ds \le \int_{T_0}^{\infty} |v(s)|^q < \infty$$

që është në kundërshtim me (6.11). Kjo vërteton edhe teoremën.

Rrjedhim 6.1 [5]. Le të jetë $\lambda > p-1$ konstant . Supozojmë se ekziston funksioni $A \in C[t_0, \infty)$, ashtu që të vlej (6.11) , dhe

$$\lim_{t\to\infty} \sup t^{-\lambda} \int_T^t (t-s)^{\lambda} c(s) ds \geq A(T) , \text{ për çdo } T \geq t_0 ,$$

atëherë ekuacioni (6.5) është oshilues.

Për $H(t,s) = (t-s)^{\lambda}$, ku $t \geq s \geq t_0$, dhe $\lambda > p-1$, për $p = 2$,kemi rezultatin e Kamenev të paraqitur në [40] .

Për ekuacionin (6.1) në [32] është paraqitur kjo :

Teorema 6.4[32] : Supozojmë se

$$\int^{\infty} r^{1-q}(t) dt = \infty \tag{6.26}$$

atëherë secili nga kushtet

i) $$\lim_{b\to\infty} \int^{b} c(t) dt = \infty \tag{6.27}$$

ii) Integrali $\int^{\infty} c(t) dt$ është konvergjen dhe

$$\lim_{t\to\infty} \inf \left(\int^{t} r^{1-q}(s) ds \right)^{p-1} \left(\int_t^{\infty} c(s) ds \right) > 1 \tag{6.28}$$

është i domosdoshëm.

Teorema 6.5[32] : Supozojmë se vlen $\int^{\infty} r^{1-q}(t) dt = \infty$, integrali $\int^{\infty} c(t) dt$, është konvergjent dhe

$$\lim_{t\to\infty} \inf \left(\int^{t} r^{1-q}(s) ds \right)^{p-1} \left(\int_t^{\infty} c(s) ds \right) > \frac{1}{p} \left(\frac{p-1}{p} \right)^{p-1}$$

atëherë ekuacioni (6.1) është oshilues.

Për ekuacionin e formës

$$u''+c(t)|u|^{\alpha}|u'|^{1-\alpha}\operatorname{sgn}u=0 \tag{6.29}$$

në [31] është paraqitur kriteri:

Teorem 6.6[31] : Le të jetë secili $\lim_{t\to\infty} c_\alpha(t)=+\infty$, për $\alpha\in[0,1]$ ose

$$-\infty<\lim_{t\to+\infty}\inf c_\alpha(t)<\lim_{t\to+\infty}\sup c_\alpha(t)\le+\infty$$

ku

$$c_\alpha(t)=\frac{\alpha^2}{t^\alpha}\int_1^t s^{\alpha-1}\int_1^s c(\eta)d\eta ds\,,\ \text{për } t>1\ , \tag{6.30}$$

atëherë ekuacioni (6.29) është oshilues.

Duke u bazuar në këtë rezultat për $\alpha=1$ kemi kriterin tanimë të njohur të paraqitur me rrjedhimin:

Rrjedhim 6.2: Le të jetë $\lim_{t\to\infty} c_1(t)=+\infty$, ose

$$-\infty<\lim_{t\to+\infty}\inf c_1(t)<\lim_{t\to+\infty}\sup c_1(t)\le+\infty$$

atëherë ekuacioni (6.29) është oshilues .

Me të vërtetë për $\alpha=1$, kushti (6.30) merr formën

$$c_1(t)=\frac{1}{t}\int_1^t\int_1^s c(\eta)d\eta ds$$

prej, nga kusht që ekuacioni

$$u''+c(t)|u|\operatorname{sgn}u=0$$

të jetë oshilues është të plotësuarit e relacionit mjaft të njohur

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_1^t\int_1^s c(\eta)d\eta ds=\infty\,.$$

Për ekuacionin e formës

$$(r(t)|y'(t)|^{\alpha-1}y'(t))'+p(t)|y(t)|^{\beta-1}y(t)=0 \qquad (6.31)$$

në [34] është paraqitur një kriter më i përgjithësuar ku përdoren shënimet

$$A_{t_0}(\phi:t)=\int_{t_0}^{t}H(t,s)\phi(s)\rho(s)ds \ , \ t\geq t_0$$

$$R(t)=\int_{t_0}^{t}r^{-1/\alpha}(s)ds\to\infty, \text{ kur } t\to\infty$$

me anë të kësaj teoreme :

Teorem 6. 7 [34] : Supozojmë se ekziston funksioni $\rho\in C^1([t_0,\infty),\Re^+)$,

$H,h\in C(D,\Re)$ dhe për ndonjë $M>0$, ashtu që

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}A_{t_0}(p-\theta g^{-\alpha}\rho^{-(\alpha+1)}|h|^{\alpha+1}:t)=\infty$$

ku

$$\theta=(\alpha+1)^{-(\alpha+1)}, \quad g(t)=\frac{\beta M}{\alpha}r^{-1/\alpha}(t)R^{-1}(t)$$

atëherë ekuacioni (6.31) është oshilues.

Për ekuacionin (6.31) kur $\alpha=\beta$, i cili merr formën

$$(r(t)|y'(t)|^{\alpha-1}y'(t))'+p(t)|y(t)|^{\alpha-1}y(t)=0 \qquad (6.32)$$

në [30] është paraqitur kriter oshilues me anë të teoremës :

Teorema 6.8 [30]: Supozojmë se ekziston funksioni i vazhdueshëm

$$H:D=\{(t,s)/t\geq s\geq t_0\}\to\Re,$$

ashtu që

$$H(t,t)=0, \text{ për } t\geq t_0, \ H(t,s)>0, \ (t,s)\in D, \qquad (A_1)$$

ku

$$h(t,s)=-\frac{\partial H(t,s)}{\partial s} \text{ funksion jonegativ i vazhdueshëm.} \qquad (A_2)$$

Nëse vlen

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t}[q(s)H(t,s)-\frac{p(s)h^{\alpha+1}(t,s)}{(\alpha+1)^{\alpha+1}H^{\alpha}(t,s)}]ds=\infty\ ,$$

atëherë ekuacioni (6.32) është oshilues.

Vërtetimin e kësaj teoreme e keni në [30] në faqen 111.

Teorema 6.9 [30]: Le të jenë H dhe h funksione që plotësojnë kushtet (A_1) , (A_2) të teoremës 7, si dhe vlen

$$0<\inf_{s\geq t_0}[\liminf_{t\to\infty}\frac{H(t,s)}{H(t,t_0)}]\leq\infty$$

dhe

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t}p(s)\frac{h^{\alpha+1}(t,s)}{H^{\alpha}(t,s)}ds<\infty\ .$$

Nëse ekziston funksioni i vazhdueshëm φ në intervalin $[t_0,\infty)$, ashtu që për çdo $T\geq t_0$ vlen

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,T)}\int_{tT}^{t}[q(s)H(t,s)-\frac{p(s)h^{\alpha+1}(t,s)}{(\alpha+1)^{\alpha+1}H^{\alpha}(t,s)}]ds\geq\varphi(T)$$

dhe

$$\int_{t_0}^{\infty}\frac{\varphi_+^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}(s)}{p^{\frac{1}{\alpha}}(s)}ds=\infty\ ,$$

ku $\varphi_+(s)=\max\{\varphi(s),0\}$, atëherë ekuacioni (6.32) është oshilues.

Për ekuacionin e Euler – Lagranzhit vlen:

Lema 6.1 [8]: Le të jetë $a(t)\in C^1((a,b),\Re^+)$ dhe $q(t)\in C((a,b),\Re)$.

Supozohet se ekuacioni (6.3) ka zgjidhje pozitive rritëse $x(t)$ në (a,b).

Nëse $y(t)\in AC((a,b),\Re_0)$ plotëson

$$\liminf_{t\to b^-} y^{\alpha+1}(t)\left[\frac{x'(t)}{x(t)}\right]^{\alpha} a(t) \geq \limsup_{t\to a^+} y^{\alpha+1}(t)\left[\frac{x'(t)}{x(t)}\right]^{\alpha} a(t), \tag{6.33}$$

atëherë

$$\liminf_{\substack{c\to a^+ \\ d\to b^-}} \int_c^d \left[a(s)|y'(s)|^{\alpha+1} - q(s)y^{\alpha+1}(s)\right]ds \geq 0_1$$

ku inekuacioni qendron nëse dhe vetëm nëse x dhe y janë proporcionalë.

Në [32] autori për ekuacionin

$$(r(t)\phi'(x'))' + c(t)\phi(x) = 0, \text{ ku } \phi(x) = |x|^{p-2} x \text{ , ku } p > 1, \tag{6.34}$$

dhe r, c funksione të vazhdueshme dhe $r(t) > 0$ paraqet disa kritere për zgjidhjet oshiluese të (6.34). Mund të thuhet se jep kushtet e ekuivalencës në zgjidhjet e këtij ekuacioni duke përdorur kriteret e njohura të Leighton – Winterit dhe kriterin e Zeev Neharit me anë të kësaj teoreme :

Teorema 6.10 [32] : Supozojmëp se vlen $\int^{\infty} r^{1-q}(t)dt = \infty$. Atëherë secili nga kushtet e mëposhtme është i domosdoshëm që ekuacioni (6.34) të jetë oshilues :

i) $\int^{b} c(t)dt = \infty$

dhe

ii) $\liminf_{t\to\infty} \left(\int^{t} r^{1-q}(s)ds\right)^{p-1} \left(\int_t^{\infty} c(s)ds\right) > 1$.

Vërtetimi është në fq. 185 [32].

Në këtë drejtim poashtu Andrej Dosly vërteton :

Teorema 6.11[32] : Supozojmë se vlen $\int^{\infty} r^{1-q}(t)dt = \infty$, integrali $\int^{b} c(t)dt = \infty$ është

konvergjent dhe

$$\liminf_{t\to\infty}\left(\int^{t} r^{1-q}(s)ds\right)^{p-1}\left(\int_{t}^{\infty} c(s)ds\right) > \frac{1}{p}\left(\frac{p-1}{p}\right)^{p-1}, \tag{6.35}$$

atëherë ekuacioni (6.34) është oshilues.

Vërtetim : Nën supozimin se (6.1) është ekuacioni jooshilues , atëherë zgjidhjet e ekuacionit të përgjithshëm të Rikatit e plotësojnë ekuacionin integral

$$w(t) = \int_{t}^{\infty} c(t)dt + (p-1)\int_{t}^{\infty} r^{1-q}(s)|w|^{q}\, ds\,.$$

Nëse ekuacionin e fundit e shumëzojmë me

$$(\int^{t} r^{1-q}(s)ds)^{p-1}$$

dhe përdorim ekuacionin (6.35) dhe supozimin se

$$\limsup_{t\to\infty}(\int^{t} r^{1-q}(s)ds)^{p-1} w(t) = \mu < \infty$$

(rasti ku $\eta = \infty$, na sjell në kundërshtim që është më e thjesht të vërehet se rasti në shqyrtim $\eta < \infty$) , prej nga mund të gjëndet $\in > 0$, ashtu që numri η , të plotësoj inekuacionin

$$\eta > \frac{1}{p}(\frac{p-1}{p})^{p-1} + \varepsilon + |\eta|^{p}\,.$$

Meqë

$$|t|^{q} - t + \frac{1}{p}\left(\frac{p-1}{p}\right)^{p-1} \geq 0,\ \text{për}\ \ t \in \Re$$

ne kemi kundërshtimin e nevojshëm.

Për ekuacionin më të përgjithësuar të formës

$$(a(t)|x'(t)|^{\alpha-1}x'(t))'+F(t,x(t))=0 \qquad (6.36)$$

ku $\alpha > 0$ është konstant, $F \in C([t_0,\infty)x\Re,\Re)$ dhe $\operatorname{sgn} F(t,x(t)) = \operatorname{sgn} x$, për $t \in [t_0,\infty)$, $t_0 \geq 0$, si dhe vlen

$$\inf_{x\neq 0} \frac{F(t,x)}{|x|^{\alpha-1}x} \geq q(t) \ , \qquad (6.37)$$

ku $q(t) \in C([t_0,\infty),\Re)$ dhe t mjaft të madh .

Teorema 6.12 [8] : Supozojmë se vlen (6.37) dhe $\int^{\infty} a^{-\frac{1}{\alpha}}(s)ds = \infty$.

Nëse

$$\lim_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} q(s)ds = \infty \qquad (6.38)$$

atëherë ekuacioni (6.16) është oshilues.

Vërtetim : Le të jetë *x(t)* zgjidhje jooshiluese e ekuacionit (6.16), themi *x(t)>0* , për $t \geq t_0 \geq 0$.

Përkufizojmë funksionin

$$w(t) = a(t)\frac{|x'(t)|^{\alpha-1}x'(t)}{x^{\alpha}(t)}, \text{ për } t \geq t_0 \qquad (6.39)$$

Nëse derivojmë barazimin (6.39) , kemi

$$w'(t) + \alpha a^{-\frac{1}{\alpha}}|w(t)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} + \frac{F(t,x(t))}{x^{\alpha}(t)} = 0, \text{ për } t \geq t_0.$$

Tani nga *a(t)>0* si dhe kushti i dhënë në (6.37), marrim

$$w'(t) + q(t) \leq 0 \text{ , për } t \geq t_0.$$

Nëse integrojmë ekuacionin e fundit nga t_0 deri në t , kemi

$$w(t) - w(t_0) + \int_{t_0}^{t} q(s)ds \le 0\,, \text{ ku } \; t \ge t_0\,.$$

Meqë , $w(t) \to -\infty$, kur $t \to \infty$, atëherë nga përkufizimi i $w(t)$, konkludojmë se

$x'(t) < 0$, ku $t > t_1$, për ndonjë $t_1 \ge t_0$. Nga kushti (6.18) zgjedhim $t_2 \ge t_1$, ashtu që

$$\int_{t_2}^{t} q(s)ds > 0\,, \text{ për } \; t > t_2\,.$$

Integrojmë (6.36) prej t_2 deri t, kemi

$$a(t)\left|x'(t)\right|^{\alpha-1} x'(t) - a(t_2)\left|x'(t_2)\right|^{\alpha-1} x'(t_2) + \int_{t_2}^{t} q(s)x(s)ds \le 0 \tag{6.40}$$

Tani nga relacioni

$$\int_{t_2}^{t} q(s)(x^{\alpha}(s)ds = \left(\int_{t_2}^{t} q(s)ds\right)(x(t))^{\alpha} - \int_{t_2}^{t}\left(\int_{t_2}^{s} q(\tau)d\tau\right)\alpha x^{\alpha-1}(s)ds \tag{6.41}$$

gjejmë se

$$\int_{t_2}^{t} q(s)(x^{\alpha}(s)ds \ge 0\,, \text{ për } \; t > t_2\,.$$

Tani nga ekuacioni (40) marrim

$$a(t)\left|x'(t)\right|^{\alpha-1} x'(t) \le a(t_2)\left|x'(t_2)\right|^{\alpha-1} x'(t_2)\,, \text{ për } \; t > t_2$$

prej nga fitojmë

$$x'(t) \le \left(\frac{a(t_2)}{a(t)}\right)^{\frac{1}{\alpha}} x'(t_2)\,, \text{ për } \; t > t_2\,. \tag{6.42}$$

Me integrimin e (6.42) tregojmë se $x(t) \to \infty$, kur $t \to \infty$, çka është në kundërshtim

me supozimin se *$x(t) > 0$*.

7.Teorema oshilacioni te ekuacioni diferencial jolinear i rendit të dytë

Duke u thelluar në përcaktimin e kushteve të cilat garantojnë zgjidhje oshiluese të ekuacioneve diferenciale të rendit të dytë, si dhe në mbështetje të rezutateve të arritura nga shumë autorë, në këtë pjesë kam konstruktuar disa kritere të oshilacionit për ekuacionin jolinearë diferencial të rendit të dytë të cilat mbulojnë disa rezultate tani më të njohura . Bëhet fjalë për ekuacionin e formës

$$(a(t)u'(t))' + p(t)f(u(g(t)) = 0 \tag{7.1}$$

zgjidhjet e të cilit do të studiohet në kushtet

a) $a \in C(t_0,\infty),\ a(t) > 0,\ \int_{t_0}^{\infty} a^{-1}(t)dt = \infty$

b) $p(t) \in C(t_0,\infty),\quad p(t) > 0$

c) $f(x) \in C((-\infty,\infty)),\ xf(x) > 0$ për

$x \neq 0,\ f \in C^1(R_D),\ R_D = (-\infty,-D) \cup (D,\infty),\quad D > 0$

d) $g(t) > 0,\ g(t) \in C^1((t_0,\infty))$, ku $g(t) \le t,\ t_0 \in R^+,\ g'(t) > 0,\ g(t) \to \infty$ kur $t \to \infty.$

Qëndron hipoteza se ekuacioni (7.1) posedon zgjidhje jotriviale në (t_0,∞). Zgjidhje të (7.1) themi se është funksioni $x(t)$, $t \in [t_x,\infty) \subset (t_0,\infty)$ i cili ka derivate deri te rendi i dytë të vazhdueshëm dhe e plotëson ekuacionin (7.1) në $[t_x,\infty)$ ku $t_x \ge t_0 \ge 0$.

Në vazhdim po japim një rrjedhim të lemës shumë të njohur të Kiguradzes të paraqitur në [12] e cila i kushtohet ekuacionit (7.1) për rastin kur *a(t)*=1.

Lema 7.1[3]: Le të jetë *u(t)* zgjidhje e ekuacionit (7.1) ku *a(t)*=1 , atëherë ekziston $\tau \geq t_0$ ashtu që $u(t)u'(t) > 0$, $u(t)u''(t) < 0$, për $t \geq \tau$.

Nën supozimin se vlejnë kushtet b) – d) në [3] është prezentuar një kriter oshilues për ekuacionin (7.1) për rastin kur *a(t)*= 1, pra për

$$u''(t) + p(t)f(u(g(t))) = 0 \tag{7.2}$$

Teorema 7.1.[3] Le të gjëndet konstanta $k > 0$ ashtu që $f'(x) \geq k$, për çdo $x \in R_D$.

Nëse

$$\int_{t_0}^{\infty} [\int_{s_1}^{\infty} p(s)ds]ds_1 = \infty \tag{7.3}$$

dhe

$$\int_{t_0}^{\infty} (tp(t) - \frac{1}{4tg'(t)k})ds]ds_1 = \infty \tag{7.4}$$

atëherë ekuacioni (7.2) është oshilues.

Vërtetim: Supozojmë se $u(t)$ është zgjidhje jooshiluese e ekuacionit (7.2) në kushtet e theksuara më sipër.

1.Le të jetë $u(t) > 0$. Atëherë duke u bazuar në lemën1. , marrim $u'(t) > 0, u''(t) < 0$, për $t \in (\tau, \infty), \tau > t_0$.

Përkufizojmë funksionin

$$W(t) = \frac{tu'(t)}{f(u(g(t))}, \quad t \in (\tau, \infty). \tag{7.5}$$

Nëse diferencojmë $W(t)$ dhe përdorim (7.1), fitojmë

$$\frac{dW(t)}{dt} = \frac{W(t)}{t} - tp(t) - W(t)\frac{f'(u(g(t))u'(g(t))g'(t)}{f(u(g(t))}.$$

Meqë $u''(t) < 0$ kemi $u'(t)$ është funksion zvogëlues , prej nga kemi

$u'(g(t)) \geq u'(t)$.

Rrjedhimisht,

$$\frac{dW(t)}{dt} \leq \frac{W(t)}{t} - tp(t) - W(t)\frac{f'(u(g(t))u'(t))g'(t)}{f(u(g(t))} =$$

$$= \frac{W(t)}{t} - tp(t) - W^2(t)\frac{f'(u(g(t))g'(t)}{t}$$

Në vazhdim ,do të tregohet se (7.3) implikon $u(t) \to \infty$, kur $t \to \infty$. Në të kundërtën , nën supozimin se $u(t)$ është i kufizuar nga sipër d.m.th. $u(t) \in \langle \alpha, \beta \rangle$, ku $\alpha > 0$. Duke përdor vetitë e $g(t)$, mund të marrim se $u(g(t)) \in \langle \alpha, \beta \rangle$. Meqë $u'(t)$ është pozitiv dhe zvogëlues ,konkludojmë se $\lim_{t\to\infty} u'(t)$ ekziston dhe është i fundëm. Tani , nëse integrohet barazimi (7.2) prej t deri ∞, kemi

$$u'(\infty) - u'(t) = -\int_t^\infty p(s) f(u(g(s))ds .$$

Duke përdor vetitë e $u(t)$, fitojmë

$$u'(t) \geq \int_t^\infty p(s) f(u(g(s))ds .$$

Nga kushti që plotëson funksioni *f(x)* marrim $f_0 = \min_{u \in \langle \alpha, \beta \rangle} f(u)$, $f_0 > 0$.

Atëherë

$$u'(t) \geq f_0 \int_t^\infty p(s)ds .$$

Nëse integrojmë inekuacionin e fundit , fitohet një relacion i cili është në kundërshtim me (7.3). Prandaj konkludojmë se $u(t) \to \infty$, kur $t \to \infty$. Prej nga marrim $u(g(t)) \in R_D$ për çdo t mjaft të madh. Lehtë vërehet se kushti $f'(u(g(t)) \geq k$ implikon

$$\frac{dW(t)}{dt} \leq \frac{W(t)}{t} - tp(t) - W^2(t)\frac{kg'(t)}{t} \tag{7.6}$$

$$\frac{dW(t)}{dt} \le -tp(t) + \frac{g'(t)k}{t}(-(W(t) - \frac{1}{2g'(t)k})^2 + \frac{1}{4(g'(t))^2 k^2}),$$

prej nga

$$\frac{dW(t)}{dt} \le -tp(t) + \frac{1}{4g'(t)k}. \tag{7.7}$$

Integrojmë (7.7) prej t_1 deri t

$$W(t) \le W(t_1) - \int_{t_1}^{t} (sp(s) - \frac{1}{4g'(s)k})ds.$$

Në relacioni e fundit për $t \to \infty$, fitohet $W(t) \to -\infty$ që është në kundërshtim me faktin se $W(t) > 0$.

2. Për $u(t) < 0$, trajtohet në mënyrë të ngjashme si në rastin $u(t) > 0$.

Në mbështetje të këtij rezultati dhe duke përdorur funksionet pozitive të Philos në vazhdim paraqes disa kritere oshilacioni për ekuacionin (7.2).

Një teoremë më e përgjithësuar për zgjidhjet oshiluese të ekuacionit (7.1) nën kushtet e cekura me siper a), b), c), dhe d) është kontribut i këtij punimi të cituar nga [23].

Teorema 7.2 [23]. Supozojmë se plotësohen kushtet a) - d) dhe ekziston një konstante $k>0$ e tillë që $f'(x) > k$ për çdo $x \in R_D$.

Nëse

$$\int_{t_0}^{\infty} [\frac{1}{a(s_1)} \int_{s_1}^{\infty} p(s)ds]ds_1 = \infty \tag{7.8}$$

dhe

$$\int_{t_0}^{\infty} (g(t)p(t) - \frac{g'(t)a(t)}{g(t)4k})dt = \infty \tag{7.9}$$

atëherë ekuacioni (7.1) është oshilues.

Vlen të theksohet se për *g(t) = t* që është një rast i ekuacionit (7.1) teorema në fjalë mbulon pohimin e paraqitur në teorema 1 .

Vërtetim: Nisemi nga e kundërta , që *u(t)* është zgjidhje jooshiluese e (7.1).
Për këtë arsye le të marrim *u(t)>0* . Atëherë nga ekuacioni (7.1) marrim

$$(a(t)u'(t))' = -p(t)f(u(g(t)) < 0,$$

meqë funksioni $a(t)u'(t)$ është zvogëlues nga kushti a) funksioni *u'(t)* është zvogëlues dhe pozitiv në $t \in (\tau, \infty)$, $\tau \geq t_0$ (shih [9]).

Definojmë funksionin pozitiv

$$W(t) = \frac{a(t)u'(t)}{f(u(g(t))}, \quad t \in (t_0, \infty) \tag{7.10}$$

Diferencojmë W(t) dhe përdorim (7.1) si rrjedhojë kemi

$$\frac{dW(t)}{dt} = \left(\frac{a(t)u'(t)}{f(u(g(t))}\right)' = -p(t)g(t) + \frac{a(t)u'(t)g(t)}{f(u(g(t))} - \frac{W(t)f'(u(g(t))u'(g(t)g'(t)}{f(u(g(t))}$$

Nga $g(t) < t$, meqë *u'(t)* (Teorema 1.[3]) është funksion zvogëlues , vërejmë se ka vend inekuacioni i mëposhtëm

$$u'(g(t)) \geq u'(t).$$

Duke e përdorur këtë , marrim

$$\frac{dW(t)}{dt} \leq -p(t)g(t) + \frac{W(t)g'(t)}{g(t)} - \frac{W^2(t)f'(u(g(t))g'(t)}{g(t)a(t)}$$

Në vazhdim nga kushti $f'(u(g(t)) > k$, kemi

$$\frac{dW(t)}{dt} \leq -p(t)g(t) + \frac{W(t)g'(t)}{g(t)} - \frac{W^2(t)kg'(t)}{g(t)a(t)} \tag{7.11}$$

prej nga fitojmë

$$\frac{dW(t)}{dt} \leq -p(t)g(t) - \frac{kg'(t)}{a(t)g(t)}\{[W^2(t) - \frac{a(t)}{2k}]^2 - \frac{a^2(t)}{4k^2}\}$$

$$\frac{dW(t)}{dt} \leq -p(t)g(t) + \frac{a(t)g'(t)}{4kg(t)} \tag{7.12}$$

Tani tregojmë se (7.8) implikon $u(t) \to \infty$ kur $t \to \infty$. Supozojmë të kundërtën se $u(t)$ është i kufizuar nga sipër , d.m.th. $u(t) \in \langle \alpha, \beta \rangle$, kur $\alpha > 0$. Duke përdor vetitë e $g(t)$, mund të supozojmë se $u(g(t)) \in \langle \alpha, \beta \rangle$. Meqë *u'(t)* është pozitiv dhe zvogëlues , kemi $\lim_{t\to\infty} u'(t)$ ekziston dhe është i fundëm. Nëse integrojmë ekuacionin (7.1) prej t deri ∞, marrim

$$u'(\infty)a(\infty) - u'(t)a(t) = -\int_t^\infty p(s)f(u(g(s))ds,$$

përdorim vetitë e *u'(t)* dhe kemi

$$u'(t)a(t) \ge \int_t^\infty p(s)f(u(g(s))ds$$

$$u'(t) \ge \frac{1}{a(t)}\int_t^\infty p(s)f(u(g(s))ds.$$

Shënojmë $f_0 = \min_{u\in\langle\alpha,\beta\rangle} f(u)$ dhe meqë $f' > 0$ kemi $f_0 > 0$.

Atëherë ka vend mosbarazimi i mëposhtëm

$$u'(t) \ge \frac{1}{a(t)} f_0 \int_t^\infty p(s)ds.$$

Duke integruar në inekuacionin prej t_0 deri t, fitojmë relacionin e mëposhtëm

$$\beta \ge u(t) \ge f_0 \int_{t_0}^t \left(\frac{1}{a(s_1)}\int_{s_1}^\infty p(s)ds\right)ds_1.$$

Kur $t \to \infty$, inekuacioni i fundit është kontradiktor me kushtin (7.8) të teoremës tonë. Prej nga konkludojmë se $u(t) \to \infty$ kur $t \to \infty$. Pra, $u(g(t)) \in R_D$, për çdo t mjaft të madh.

Tani vërehet lehtë se kushti $f'(u(g(t)) \ge k$ implikon (7.7) i cili nëse integrohet prej t_1 deri t, kemi

$$W(t) \le W(t_1) - \int_{t_1}^t \left(p(t)g(t) - \frac{a(t)g'(t)}{4kg(t)}\right)dt,$$

prej nga kur $t \to \infty$, fitojmë $W(t) \to -\infty$, që është në kundërshtim me faktin se funksioni *W(t)>0*.

Për *u(t)<0*, rasti mund të trajtohet në mënyrë të ngjashme sikurse për *u(t)>0* pra, vërtetimi u kompletua.

Nëse në teorema 1. marrim $a(t) = 1$, fitohet rezultati i prezantuar në [3].

Duke u bazuar në rezultatin e fituar mund të vërejmë një kriter oshilues që lehtë verifikohet për ekuacionin (7.1) në rrjedhimin në vazhdim .

Rrjedhim 7.1[23]. Supozojmë se kanë vend kushtet nga a) – d) dhe (7.8) . Le të ekzistojë konstantja *k>0* e tillë që $f'(x) \geq k$ për çdo $x \in R_D$ dhe

$$\lim_{t\to\infty} \inf\{\frac{g^2(t)p(t)}{g'(t)a(t)}\} > \frac{1}{4k} \tag{7.13}$$

atëherë ekuacioni (7.1) është oshilues.

Për *a(t)=l >0* kemi rrjedhimin 2.5 në [3].

Vërtetim: Me një kalkulim të thjeshtë tregohet se inekuacioni (7.13) implikon (7.9).

Rrjedhim 7.2[23]. Supozojmë se kanë vend kushtet nga a) – d) dhe (7.8).

Nëse vlen

$$\int_{t_0}^{\infty} (tp(t) - \frac{a(t)}{4kt})dt = \infty \tag{7.14}$$

atëherë ekuacioni

$$(a(t)u'(t))' + p(t)f(u(t)) = 0$$

është oshilues.

Vërtetim: Lehtë vërehet se (7.9) mund të reduktohet tek (7.14) nëse marrim *g(t)=t.*

Me involvimin e funksioneve te Philos në vazhdim paraqiten disa kritere oshilacioni per ekuacionin (7.2).

Teorema 7.3 [25]. Supozojmë se vlen a), b) dhe c) . Le të gjendet konstanta $k > 0$ ashtu që $f'(x) \geq k$, $\forall x \in R_D$. Gjithashtu plotësohet edhe relacioni (7.3) . Nëse ekziston $(a,b) \subseteq [t_0, \infty), c \in (a,b)$, ashtu që

$$\frac{1}{H(c,a)}\int_a^c H(s,a)sp(s)ds + \frac{1}{H(b,c)}\int_c^b H(b,s)sp(s)ds >$$

$$\frac{1}{H(c,a)}\int_a^c \frac{(sh_2(s,a)-\sqrt{H(s,a)})^2}{4kg'(s)s}ds+\frac{1}{\mathrm{H(b,c)}}\int_c^t \frac{(sh_2(b,s)-\sqrt{H(b,s)})^2}{4ksg'(s)}ds \qquad (7.15)$$

atëherë çdo zgjidhje e ekuacionit (7.2) është oshiluese.

Vërtetim : Supozojmë të kundërtën , pra *u(t)* është zgjidhje jooshiluese e ekuacionit (7.2), themi $u(t)\neq 0$ në $[t_0,\infty)$.

Nga Teorema 1. nëse inekuacionin

$$\frac{dW(t)}{dt}\leq \frac{W(t)}{t}-tp(t)-W^2(t)\frac{kg'(t)}{t} \qquad (7.16)$$

e shumëzojmë me $H(t,s)$ dhe integrojmë prej c deri t , ku $t\in(c,b), s\in(c,t)$,

kemi

$$\int_c^t H(t,s)sp(s)ds\leq -\int_c^t H(t,s)W'(s)ds+\int_c^t H(t,s)\frac{W(s)}{s}ds-\int_c^t \frac{W^2(s)kg'(s)H(t,s)}{s}ds$$

$$\int_c^t H(t,s)sp(s)ds\leq H(t,s)W(s)-\int_c^t W(s)h_2(t,s)\sqrt{H(t,s)}ds-\int_c^t H(t,s)W'(s)ds+$$

$$+\int_c^t H(t,s)\frac{W(s)}{s}ds-\int_c^t \frac{W^2(s)kg'(s)H(t,s)}{s}ds$$

$$\int_c^t H(t,s)sp(s)ds\leq H(t,s)W(s)-\int_c^t [\sqrt{\frac{H(t,s)kg'(s)}{s}}W(s)+\frac{1}{2}\frac{(h_2(t,s)\sqrt{H(t,s)}-\frac{H(t,s)}{s}}{\sqrt{\frac{H(t,s)g'(s)k}{s}}}]^2 ds+$$

$$+\int_c^t \frac{(h_2(t,s)\sqrt{H(t,s)}-\frac{H(t,s)}{s})^2}{4\frac{H(t,s)kg'(s)}{s}}ds$$

$$\int_c^t H(t,s)sp(s)ds\leq H(t,s)W(s)+\int_c^t \frac{(sh_2(t,s)-\sqrt{H(t,s)})^2}{4ksg'(s)}ds \qquad (7.17)$$

Tani, nëse për $t\to b_-$ në (7.17) dhe pjesëtimit anë për anë me *H(b,c)* , marrim

$$\frac{1}{H(b,c)}\int_c^b H(b,s)sp(s)ds \le W(s) + \frac{1}{H(b,c)}\int_c^t \frac{(sh_2(b,s)-\sqrt{H(b,s)})^2}{4ksg'(s)}ds \tag{7.18}$$

Nëse (7.16) shumëzohet me $H(s,t)$ dhe integrohet mbi (t,c), ku $t\in(a,c), s\in(t,c)$,

kemi

$$\int_t^c H(s,t)sp(s)ds \le -\int_c^t H(s,t)W'(s)ds + \int_c^t H(s,t)\frac{W(s)}{s}ds - \int_c^t \frac{W^2(s)kg'(s)H(s,t)}{s}ds$$

$$\int_t^c H(s,t)sp(s)ds \le -H(c,t)W(c) + \int_c^t W(s)h_1(s,t)\sqrt{H(s,t)}ds +$$

$$+\int_c^t H(s,t)\frac{W(s)}{s}ds - \int_c^t \frac{W^2(s)kg'(s)H(s,t)}{s}ds$$

$$\int_t^c H(s,t)sp(s)ds \le H(c,t)W(s) - \int_t^c [\sqrt{\frac{H(t,s)kg'(s)}{s}}W(s) + \frac{1}{2}\frac{(h_1(t,s)\sqrt{H(s,t)} - \frac{H(s,t)}{s}}{\sqrt{\frac{H(s,t)g'(s)k}{s}}}]^2 ds +$$

$$+\int_t^c \frac{(h_2(t,s)\sqrt{H(s,t)} - \frac{H(s,t)}{s})^2}{4\frac{H(s,t)kg'(s)}{s}}ds$$

Prej nga

$$\int_t^c H(s,t)sp(s)ds \le H(c,t)W(s) + \int_t^c \frac{(h_2(t,s)\sqrt{H(s,t)} - \frac{H(s,t)}{s})^2}{4\frac{H(s,t)kg'(s)}{s}}ds\,. \tag{7.19}$$

Nëse në (7.19) marrim $t \to a^+$ dhe pjesëtohet me *H(c,a)*, fitojmë

$$\frac{1}{H(c,a)}\int_a^c H(s,a)sp(s)ds \le W(s) + \frac{1}{H(c,a)}\int_a^c \frac{(sh_2(s,a)-\sqrt{H(s,a)})^2}{4kg'(s)s}ds \tag{7.20}$$

Nëse inekuacionin (7.18) ia shtojmë (7.20), fitojmë relacionin në vijim:

$$\frac{1}{H(c,a)}\int_a^c H(s,a)sp(s)ds + \frac{1}{H(b,c)}\int_c^b H(b,s)sp(s)ds \leq$$

$$\leq \frac{1}{H(c,a)}\int_a^c \frac{(sh_2(s,a)-\sqrt{H(s,a)})^2}{4kg'(s)s}ds + \frac{1}{\mathrm{H(b,c)}}\int_c^t \frac{(sh_2(b,s)-\sqrt{H(b,s)})^2}{4ksg'(s)}ds$$

Relacioni i fundit është në kundërshtim me kushtin (7.6) , prandaj , çdo zgjidhje e ekuacionit (7.2) është oshiluese . Vërtetimi është i kompletuar.

Nëse $H(t,s)=(t-s)^{\lambda}$, $t \geq s \geq t_0$, ku $\lambda > 1$, marrim ;

Rrjedhim 7.3[25].Supozojmë se vlejnë kushtet a),b),c), (7.3) dhe $f'(x) \geq k > 0$, atëherë çdo zgjidhje e ekuacionit (7.2) është oshiluese për $\lambda > 1$, nëse qëndrojnë inekuacionet:

$$\limsup_{b\to\infty}\frac{1}{b^{\lambda}}\{\int_c^b (s-c)^{\lambda} sp(s)ds - \int_c^b \frac{(s-c)^{\lambda-2}(s\lambda-(s-c))^2}{4kg'(s)}ds\} > 0 \qquad (7.21)$$

dhe

$$\limsup_{b\to\infty}\frac{1}{b^{\lambda}}\{\int_c^b (b-s)^{\lambda} sp(s)ds - \int_c^b \frac{(b-s)^{\lambda-2}(s\lambda-(b-s))^2}{4kg'(s)}ds\} > 0 \qquad (7.22)$$

Vërtetim: Nga (7.18) , marrim

$$W(s) \geq \frac{1}{H(b,c)}\int_c^b H(b,s)sp(s)ds - \frac{1}{H(b,c)}\int_c^t \frac{(sh_2(b,s)-\sqrt{H(b,s)})^2}{4ksg'(s)}ds$$

si dhe për

$H(t,s)=(t-s)^{\lambda}$, kemi $h_1(t,s)=h_2(t,s)=\lambda(t-s)^{\frac{\lambda}{2}-1}$

prej nga

$$\limsup_{b\to\infty}\frac{1}{b^{\lambda}}\{\int_c^b (s-c)^{\lambda} sp(s)ds - \int_c^b \frac{(s-c)^{\lambda-2}(s\lambda-(s-c))^2}{4kg'(s)}ds\} > 0$$

Ngjashëm prej (7.20) marrim inekuacionin (7.22). Me këtë vërtetimi u kompletua.

Teorema 7.4[23]. Supozojmë se kanë vend kushtet nga a) - d) dhe $f'(x) \geq k > 0$ qëndron për $t > t_0$. Nëse ekziston $(a,b) \subset [t_0, \infty)$, $c \in (a,b)$ të tillë që

$$\frac{1}{H(c,a)} \int_a^c \{H(s,a)p(s)g(s) - \frac{g(s)a(s)}{4kg'(s)} \phi_1^{\,2}(s,a)\} ds +$$

$$\frac{1}{H(b,c)} \int_b^c \{H(b,c)p(s)g(s) - \frac{g(s)a(s)}{4kg'(s)} \phi_2^{\,2}(b,s)\} ds > 0 \qquad (7.23)$$

ku

$$\phi_1(s,t) = h_1(s,t) + \frac{g'(s)}{g(s)} \sqrt{H(s,t)}$$

$$\phi_1(t,s) = h_2(t,s) - \frac{g'(s)}{g(s)} \sqrt{H(t,s)}$$

atëherë ekuacioni (7.1) është oshilues.

Vërtetim : Supozojmë të kundërtën d.m.th. *x(t)* zgjidhje jooshiluese e ekuacionit (7.1) , themi $x(t) \neq 0$ në $[t_0, \infty)$ për ndonjë $t > t_0$. Nga (7.7) nëse atë e shumëzojmë me H(s,t) dhe integrojmë në (t,c) për $t \in [a,c)$ dhe $s \in (t,c]$, marrim

$$\int_t^c H(s,t)p(s)g(s)ds \leq \int_t^c H(s,t)W'(s)ds - \int_t^c \frac{W^2(s)g'(s)H(s,t)}{g(s)a(s)} ds + \int_t^c \frac{W(s)g'(s)H(s,t)}{g(s)a(s)} ds$$

$$= -H(t,s)W(c) - \int_t^c \{\frac{W^2(s)kg'(s)}{g(s)a(s)} H(s,t) + \phi_1(s,t)\sqrt{H(s,t)}W(s)\} ds$$

$$= -H(t,s)W(c) - \int_t^c [W(s)\sqrt{\frac{kg'(s)H(s,t)}{g(s)a(s)}} + \frac{1}{2}\phi_1(s,t)\sqrt{\frac{g(s)a(s)}{kg'(s)}}]^2 ds + \frac{1}{4}\int_t^c \phi_1^{\,2}(s,t) \frac{g(s)a(s)}{kg'(s)} ds$$

$$\leq -H(t,s)W(c) + \frac{1}{4}\int_t^c \phi_1^{\,2}(s,t) \frac{g(s)a(s)}{kg'(s)} ds \qquad (7.24)$$

Në (7.24) për $t \to a^+$ dhe pas pjesëtimit me $H(b,c)$ anë për anë fitohet

$$\frac{1}{H(b,a)} \int_a^c H(s,a)p(s)g(s)ds \leq -W(c) + \frac{1}{4H(b,a)} \int_a^c \phi_1^{\,2}(s,a) \frac{g(s)a(s)}{kg'(s)} ds \qquad (7.25)$$

Nga ana tjetër , nëse shumëzohet (7.7) me H(t,s) dhe integrohet mbi $[c,t)$ ku $t \in [c,b)$ për $s \in [c,t)$, kemi

$$\int_c^t H(t,s)p(s)g(s)ds \le \int_c^t H(t,s)W'(s)ds - \int_c^t \frac{W^2(s)g'(s)H(t,s)}{g(s)a(s)}ds + \int_c^t \frac{W(s)g'(s)H(t,s)}{g(s)a(s)}ds$$

$$= -H(t,c)W(c) - \int_c^t \{\frac{W^2(s)kg'(s)}{g(s)a(s)}H(t,s) + \phi_2(s,t)\sqrt{H(t,s)}W(s)\}ds$$

$$\le H(t,c)W(c) - \frac{1}{4}\int_c^t \phi_2^{\,2}(t,s)\frac{g(s)a(s)}{kg'(s)}ds \tag{7.26}$$

Nëse $t \to b^-$ në (7.26) dhe pjesëtohet me $H(b,c)$, atëherë

$$\frac{1}{H(b,c)}\int_c^b H(b,s)p(s)g(s)ds \le W(c) - \frac{1}{4H(b,c)}\int_c^b \phi_2^{\,2}(b,s)\frac{g(s)a(s)}{kg'(s)}ds \tag{7.27}$$

Me mbledhjen e (7.25) dhe (7.27) marrim inekuacionin në vazhdim

$$\frac{1}{H(c,a)}\int_a^c \{p(s)g(s)H(s,a) - \frac{g(s)a(s)}{4kg'(s)}\phi_1^{\,2}(s,a)\}ds +$$

$$\frac{1}{H(b,c)}\int_c^b \{p(s)g(s)H(b,s) - \frac{g(s)a(s)}{4kg'(s)}\phi_2^{\,2}(b,s)\}ds \le 0 \tag{7.28}$$

Inekuacioni i fundit është kontradiktorë me kushtin (7.23) , prandaj çdo zgjidhje e ekuacionit (7.1) është oshiluese. Vërtetimi u kompletua.

Nëse $H(t,s) = H(t-s)$ atëherë $h_1(t-s) = h_2(t-s) \overset{def}{=} h(t-s)$.

Teorema 7.5[23].Supozojmë se kanë vend kushtet nga a) - d) dhe $f'(x) \ge k > 0$. Nëse për $t > t_0$ ekzistojnë numrat *a, c* ; $t < a < c$, të tillë që për $H \in X$ vlen

$$\int_a^c \{[p(s)g(s) - p(2c-s)g(2c-s)]H(s-a) - \frac{g(s)a(s)}{4kg'(s)}(h(s-a) + \frac{g(s)}{g'(s)}\sqrt{H(s-a)})^2 -$$

$$\frac{g(2c-s)a(2c-s)}{4kg'(2c-s)}(h(s-a) + \frac{g(2c-s)}{g'(2c-s)}\sqrt{H(s-a)})^2\}ds > 0 \tag{7.29}$$

atëherë ekuacioni (7.1) është oshilues.

Vërtetim : Nëse $c \in (a,b)$ dhe $2c = a + b$, kemi $H(b-c) = H(c-a) = H(\frac{b-a}{2})$.

Tani përdorim

$$\int_c^b w(s)ds=\int_a^c w(2c-s)ds \quad \text{ose} \quad \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(t)dt=\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(a+b-s)ds$$

në (7.23) , fitojmë (7.29) . Vërtetimi është i kompletuar.

Shembull 7.1[23]: Marrim ekuacionin trivial diferencial jolinear të rendit të dytë

$$(\frac{x'(t)}{e^t})'+e^t(x(\frac{t}{2})(1+x^2(\frac{t}{2}))=0$$

ku $a(t)=e^{-t}$, $p(t)=e^t$ dhe $f(x)=x(1+x^2)$, $f'(x)=1+3x^2>1$.

Meqë ka vend barazimi

$$\int_{t_0}^{\infty}[\frac{1}{a(s_1)}\int_{s_1}^{\infty}p(s)ds]ds_1=\int_{t_0}^{\infty}[e^t\int_t^{\infty}e^s ds]dt=\infty$$

dhe

$$\int_{t_0}^{\infty}(g(t)p(t)-\frac{g'(t)a(t)}{g(t)4k})dt=\int_{t_0}^{\infty}(\frac{t}{2}e^t-\frac{\frac{1}{2}e^{-t}}{4k\frac{t}{2}})dt=\infty$$

që sipas teoremës, (7.1) ekuacioni është oshilues.

Një arritje tjetër sa i përket zgjidhjeve oshiluese të ekuacionit (7.2) prezenton edhe teorema në vazhdim.

Teorema 7.6[25]. Le të jetë $k>0$,ku $f'(x)>k$ për çdo $x\in R_D$. Supozojmë se vlen (7.3) , atëherë çdo zgjidhje e ekuacionit (7.2) është oshiluese nëse ekziston $u\in C[a,b]$ që plotëson $u'(t)\in L^2[a,b]$, ku $u(a)=u(b)=0$ dhe

$$\int_a^b[(u^2(s)sp(s)-\frac{2s^2u'(s)-u(s)}{2kg'(s)}]ds>0\,. \tag{7.30}$$

Vërtetim : Supozojmë të kundërtën , pra *u(t)* zgjidhje jooshiluese e ekuacionit (7.2) , themi $u(t)\neq 0$ në $[t_0,\infty)$. Në mënyrë të ngjashme si në vërtetimin e teoremës 2 , shumëzojmë inekuacionin (7.16) me $u^2(t)$, dhe integrojmë në respekt të s prej a deri në b dhe përdorim $u(a)=u(b)=0$, arrijmë në relacionin

$$\int_a^b u^2(s)sp(s)ds \le -\int_a^b u^2(s)W'(s)ds - \int_a^b \frac{W^2(s)}{s}u^2(s)kg'(s)ds + \int_a^b u^2(s)\frac{W(s)}{s}ds$$

$$\int_a^b u^2(s)sp(s)ds \le 2\int_a^b u(s)u'(s)W(s)ds - \int_a^b \frac{W^2(s)}{s}u^2(s)kg'(s)ds + \int_a^b u^2(s)\frac{W(s)}{s}ds$$

$$\int_a^b u^2(s)sp(s)ds \le -\int_a^b [\sqrt{\frac{kg'(s)}{s}}W(s)u(s) - (u'(s) - \frac{u(s)}{s})\frac{1}{2}\sqrt{\frac{s}{kg'(s)}}]^2 ds + \int_a^b \frac{2s^2u'(s) - u(s)}{2kg'(s)}ds$$

prej ku

$$\int_a^b u^2(s)sp(s)ds \le \int_a^b \frac{2s^2u'(s) - u(s)}{2kg'(s)}ds$$

$$\int_a^b [u^2(s)sp(s)ds - \frac{2s^2u'(s) - u(s)}{2kg'(s)}]ds \le 0$$

që është në kundërshtim me kushtin (7.30), pra rrjedhimisht çdo zgjidhje e ekuacionit (7.2) është oshiluese. Vërtetimi është i tërësishëm.

Ne vazhdim vertetojmë kritere oshiluese për ekuacionin e formës

$$(r(t)g(\varphi(x(t))x'(t))' + q(t)f(x(t)) = 0 \qquad (7.31)$$

të cilat në raste të caktuara të funksionit g, mund të aplikohen edhe në ekuacionet (7.1) dhe (7.2).

Nën supozimin se vlen

A1) $r(t) \in C([t_0,\infty))$, $r(t) > 0$, for $t \ge t_0$,

A2) $f(x) \in C(\Re)$, $xf(x) > 0$, for $x \ne 0$,

A3) $g(x) \in C(\Re)$, , for $x \in \Re$,

A4) $q(t) \in C([t_0,\infty))$, $\mathrm{q}(t) > 0$ for $t \ge t_0$

vertetojmë :

Teorema 7. 7[64]. Le të gjenden konstantat *k, m, M*, ashtu që :

$$f', \varphi' \ge k > 0 \quad , \ 0 < m \le g(t) \le M \qquad (7.32)$$

dhe

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t}(q(s)H(t,s)-\frac{h_2(t,s)r(s)M}{4k^2})ds=\infty\,, \tag{7.33}$$

atëherë ekuacioni (7.31) është oshilues .

Vërtetim : Supozohet se $x(t)$ është zgjidhje jooshiluese e ekuacionit (7.31). Atëherë ekziston t_0 , ashtu që $x(t)\neq 0$, për $t>t_0$.

Përkufizojmë

$$w(t)=\frac{r(t)g(\varphi(x(t))x'(t)}{f(\varphi(x(t))}\,,\ \text{për}\quad t>t_0\,. \tag{7.34}$$

Tani nga (7.34) , duke konsideruar (7.32) dhe (7.31), kemi

$$q(t)\leq -w'(t)-\frac{w^2(t)k^2}{rM}\,. \tag{7.35}$$

Shumëzohet (7.35) në të dy anët me funksionin e njohur pozitiv $H(t,s)$ dhe integrohet prej t_0 deri t, fitojmë

$$\int_{t_0}^{t}q(s)H(t,s)ds\leq H(t,t_0)w(t_0)-\int_{t_0}^{t}w(s)h_2(t,s)\sqrt{H(t,s)}ds-$$

$$-\int_{t_0}^{t}\frac{w^2(t,s)k^2\sqrt{H(t,s)}}{rM}ds\,,$$

$$\int_{t_0}^{t}q(s)H(t,s)ds\leq H(t,t_0)w(t_0)-\int_{t_0}^{t}\left(\frac{wk\sqrt{H(t,s)}}{\sqrt{r(s)M}}+\frac{h_2(t,s)\sqrt{rM}}{2k}\right)^2ds+\int_{t_0}^{t}\frac{{h_2}^2(t,s)r(s)M}{4k^2}ds\,,$$

prej nga

$$\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t}(q(s)H(t,s)-\frac{{h_2}^2(t,s)r(s)M}{4k^2})ds\leq w(t_0) \tag{7.36}$$

gjë që nga (7.36) rrjedh se

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} (q(s)H(t,s) - \frac{h_2^{\,2}(t,s)r(s)M}{4k^2})ds$$

është e kufizuar, çka është një kundërshtim me kushtin e dhënë në teoremë.

Lema 7.2[64]. : Le të jenë $A_0, A_1 \in C([t_0,\infty),\Re)$, ku $A_1 > 0$ dhe $w \in C^1([t_0,\infty),\Re)$.

Nëse ekziston $(a,b) \subset [t_0,\infty)$ dhe $c \in (a,b)$, ashtu që

$$w'(t) \le -A_0(t) - A_1(t)w^2(t) \qquad (7.37)$$

atëherë

$$\frac{1}{H^{\alpha}(c,a)} \int_a^c (H^{\alpha}(s,a)A_0(s) - \frac{\alpha^2}{4} \frac{H^{\alpha-1}(s,a)h_1^{\,2}(s,a)}{A_1(s)})ds +$$

$$\frac{1}{H^{\alpha}(b,c)} \int_a^c (H^{\alpha}(b,s)A_0(s) - \frac{\alpha^2}{4} \frac{H^{\alpha-1}(b,s)h_2^{\,2}(b,s)}{A_1(s)})ds \le 0 \qquad (7.38)$$

Metoda Ricati i kushton kujdes të veçantë përcaktimit të funksioni w i cili përbëhet nga koeficientët e barazimit (7.31) si dhe të ndonjë funksioni që plotëson kushte të caktuara.

Vërtetim : Nëse shumëzohet ekuacioni (7.37) me $H^{\alpha}(t,s) > 0$ dhe integrohet prej t deri c , marrim

$$\int_t^c H^{\alpha}(s,t)w'(s)ds \le - \int_t^c H^{\alpha}(s,t)A_0(s)ds - \int_t^c H^{\alpha}(s,t)w^2(s)ds$$

prej nga

$$\int_t^c H^{\alpha}(s,t)A_0(s)ds \le -w(c)H^{\alpha}(c,t) -$$

$$\int_t^c \left(\sqrt{H^{\alpha}(s,t)A_1(s)}w - \frac{\alpha}{2} \frac{H^{\frac{\alpha-1}{2}}(s,t)h_1(s,t)}{\sqrt{A_1(s)}} \right)^2 ds + \int_t^c \frac{\alpha^2}{4} \frac{H^{\alpha-1}(s,t)h_1^{\,2}(s,t)}{A_1(s)} ds\,.$$

Nëse $t \to a^+$ dhe pjesëtohet me H^{α}, kemi

$$\frac{1}{H^{\alpha}(c,a)}\int_a^c\left(H^{\alpha}(s,a)A_0(s)-\frac{\alpha^2}{4}\frac{H^{\alpha-1}(s,a)h_1(s,a)}{\sqrt{A_1(s)}}\right)ds\le -w(c)\,. \qquad (7.39)$$

Ngjashëm , nëse ekuacioni (7.37) shumëzohet me $H^{\alpha}(t,s)>0$ dhe integrohet prej c deri t , fitojmë

$$\int_c^t H^{\alpha}(s,t)w'(s)ds\le -\int_c^t H^{\alpha}(s,t)A_0(s)ds-\int_c^t H^{\alpha}(s,t)w^2(s)ds$$

prej nga

$$\int_c^t H^{\alpha}(s,t)A_0(s)ds\le w(c)H^{\alpha}(t,c)-$$

$$\int_c^t\left(\sqrt{H^{\alpha}(t,s)A_1(s)}w(s)+\frac{\alpha}{2}\frac{H^{\frac{\alpha-1}{2}}(t,s)h_2(t,s)}{\sqrt{A_1(s)}}\right)^2ds+\int_t^c\frac{\alpha^2}{4}\frac{H^{\alpha-1}(t,s)h_2{}^2(t,s)}{A_1(s)}ds\,.$$

Nëse $t\to b\_$ dhe pjesëtimit me H^{α}, kemi

$$\frac{1}{H^{\alpha}(b,c)}\int_c^b\left(H^{\alpha}(b,c)A_0(s)-\frac{\alpha^2}{4}\frac{H^{\alpha-1}(b,c)h_1(b,c)}{\sqrt{A_1(s)}}\right)ds\le w(c) \qquad (7.40)$$

Në fund nëse i mbledhim (7.39) dhe (7.40) , fitojmë (7.38).

8. Kritere oshilacioni për ekuacionin diferencial jolinear të rendit të dytë me kufizë që shuhet

Zgjidhjet oshiluese të ekuacionit diferencial të rendit të dytë të formës

$$(r(t)x'(t))' + p(t)x'(t) + q(t)f(x(g(t))) = 0 \qquad t \geq t_0 \tag{8.1}$$

kanë qenë studiuar nga një numër i madh autorësh dhe janë përcaktuar kritere të natyrave të ndryshme . Kontribut i këtij disertacioni janë edhe disa teorema të vërtetuara në vazhdim të cilat duke u mbështetur në kushte të caktuara përcaktojnë zgjidhjet oshiluese të ekuacionit (8.1) . Koeficientët e ekuacionit plotësojnë kushtet :

A_1) $r \in C[[t_0,\infty), R_+]$, $p,q \in C[[t_0,\infty), R]$, $g \in C^1([t_0,\infty),(0,\infty))$,

$g'(x) \geq l > 0$, $g(x) \neq 0$.

A_2) $xf(x) > 0$, for $x \neq 0$;

A_3) f funksion me derivat të vazhdueshëm dhe plotëson për çdo $x \in R$,

$f'(x) \geq k > 0$.

Në vazhdim po japim një pohim i cili na ndihmon në nxjerrjen e rezultateve qe i takojnë barazimeve të këtij lloji.

Lema 8.1[64]. Supozohet se funksioni $\omega \in C^1((t_0,\infty),(0,\infty)$ plotëson inekuacionin

$$w'(t) \leq -\alpha(t) + \beta(t)w(t) - \gamma(t)w^2(t) \tag{8.2}$$

për çdo interval $(a,b) \in I$, ku funksionet $\alpha \in C(I,R)$, $\beta \in C(I,R)$, $\gamma \in C(I,(0,+\infty)$ dhe $I = (t_0,\infty)$. Atëherë për ndonjë $H \in W$, $\alpha \geq 0$ vlen

$$\frac{1}{H^{\alpha+1}(c,a)}\int_a^c H^{\alpha+1}(a,s)[\alpha(s)-\frac{1}{4\gamma(s)}(\beta(s)-(\alpha+1)h_1(s,a)H^{-\frac{1}{2}}(s,a))]ds+$$

$$+\frac{1}{H^{\alpha+1}(c,b)}\int_c^b H^{\alpha+1}(b,s)[\alpha(s)-\frac{1}{4\gamma(s)}(\beta(s)+(\alpha+1)h_2(b,s)H^{-\frac{1}{2}}(b,s))]ds>0 \qquad (8.3)$$

Rezultatet në vijim qëndrojnë për $f(x)$ funksion monoton.

Teorema 8.1[64]. Supozohet se vlejnë (A_1), (A_2), (A_3) dhe për çdo $c\in(a,b)$ dhe për çdo $H\in W$, $v\in C^1([t_0,\infty),(0,\infty))$, $\alpha\geq 0$, nëse

$$\frac{1}{H^{\alpha+1}(c,a)}\int_a^c H^{\alpha+1}(s,a)q(s)v(s)-\frac{v(s)r(s)}{4kg'(s)}(\frac{v'(s)}{v(s)}-\frac{p(s)}{r(s)}+(\alpha+1)h_1(s,a)H^{-\frac{1}{2}}(s,a))^2]ds+$$

$$\frac{1}{H^{\alpha+1}(b,c)}\int_c^b H^{\alpha+1}(b,s)[q(s)v(s)-\frac{v(s)r(s)}{4kg'(s)}(\frac{v'(s)}{v(s)}-\frac{p(s)}{r(s)}-(\alpha+1)h_2(b,s)H^{-\frac{1}{2}}(b,s))^2]ds>0 \quad (8.4)$$

atëherë çdo zgjidhje e ekuacionit (8.1) ka së paku një zero në (a,b).

Vërtetim **:** Supozohet se ekziston zgjidhja *x(t)* e ekuacionit diferencial (8.1) e cila nuk ka zgjidhje në intervalin (a,b) me fjal tjera ka shenjë konstante në atë interval. Pa humbur në përgjithësim , supozohet se $x(t)>0$ për çdo $t\in(a,b)$.

Përkufizojmë funksioni npozitiv

$$w(t)=v(t)\frac{r(t)x'(t)}{f(g(x(t))}\ ,\ t>t_0 \qquad (8.5)$$

diferencojmë (8.4) dhe përdorim (8.1) marrim

$$w'(t)=\frac{v'(t)}{v(t)}w(t)-\frac{p(t)}{r(t)}w(t)-v(t)q(t)-w^2(t)\frac{f'(g(x(t))g'(x(t))}{v(t)r(t)}$$

prej (A_1) , (A_3), fitojmë

$$w'(t)\leq\frac{v'(t)}{v(t)}w(t)-\frac{p(t)}{r(t)}w(t)-v(t)q(t)-w^2(t)\frac{kl}{v(t)r(t)} \qquad (8.6)$$

Shumëzojmë (8.6) me $H^{\alpha+1}(s,t)$ dhe integrojmë në respekt të $s,$ prej t deri në c , për $t\in(a,c]$, ne arrijmë

$$\int_t^c H^{\alpha+1}(s,t)v(s)q(s)ds \le -H^{\alpha+1}(s,t)\Big|_t^c + \int_t^c (\alpha+1)H^{\alpha}(s,t)h_1(s,t)\sqrt{H(s,t)}w(s)ds -$$

$$\int_t^c H^{\alpha+1}(s,t)\frac{klw^2(s)}{v(s)r(s)}ds + \int_t^c H^{\alpha+1}(s,t)(\frac{v'(s)}{v(s)} - \frac{p(s)}{r(s)})ds$$

dhe

$$\int_t^c H^{\alpha+1}(s,t)v(s)q(s)ds \le -H^{\alpha+1}(c,t)w(c) -$$

$$\int_t^c H^{\alpha+1}(s,t)[\frac{w(s)\sqrt{kl}}{\sqrt{v(s)r(s)}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{v(s)r(s)}{kl}}(\frac{v'(s)}{v(s)} - \frac{p(s)}{r(s)} + (\alpha+1)h_1(t,s)H^{\frac{1}{2}}(s,t)]^2 ds +$$

$$\int_t^c H^{\alpha+1}(s,t)\frac{v(s)r(s)}{4kl}[\frac{v'(s)}{v(s)} - \frac{p(s)}{r(s)} + (\alpha+1)h_1(s,t)H^{-\frac{1}{2}}(s,t)]^2 ds$$

prej nga

$$\int_t^c H^{\alpha+1}(s,t)v(s)q(s)ds \le -H^{\alpha+1}(c,t)w(c) +$$

$$\int_t^c H^{\alpha+1}(s,t)\frac{v(s)r(s)}{4kl}[\frac{v'(s)}{v(s)} - \frac{p(s)}{r(s)} + (\alpha+1)h_1(s,t)H^{-\frac{1}{2}}(s,t)]^2 ds \qquad (8.7)$$

Le të marrim $t\to a^+$ në (8.7) dhe pjesëtojmë atë me $H^{\alpha+1}(c,a)$, fitohet

$$\frac{1}{H^{\alpha+1}(c,a)}\Big\{ \int_a^c H^{\alpha+1}(s,a)v(s)q(s)ds -$$

$$\int_a^c H^{\alpha+1}(s,a)\frac{v(s)r(s)}{4kl}[\frac{v'(s)}{v(s)} - \frac{p(s)}{r(s)} + (\alpha+1)h_1(s,a)H^{-\frac{1}{2}}(s,a)]^2 ds \Big\} \le -w(c) \qquad (8.8)$$

Në anën tjetër , nëse shumëzohet me $H^{\alpha+1}(t,s)$ relacioni (6) dhe integrohet i njëjti prej c deri në t, kemi

$$\int_c^t H^{\alpha+1}(t,s)v(s)q(s)ds \le H^{\alpha+1}(t,c)w(c) +$$

$$\int_c^t H^{\alpha+1}(t,s)\frac{v(s)r(s)}{4kl}\left[\frac{v'(s)}{v(s)} - \frac{p(s)}{r(s)} - (\alpha+1)h_2(t,s)H^{-\frac{1}{2}}(t,s)\right]^2 ds \qquad (8.9)$$

Gjithashtu, le të marrim $t \to b^-$ dhe shumëzojmë atë me $H^{\alpha+1}(b,c)$, kemi

$$\frac{1}{H^{\alpha+1}(b,c)}\{\int_c^b H^{\alpha+1}(t,s)v(s)q(s)ds -$$

$$\int_c^b H^{\alpha+1}(b,s)\frac{v(s)r(s)}{4kl}\left[\frac{v'(s)}{v(s)} - \frac{p(s)}{r(s)} - (\alpha+1)h_2(b,s)H^{-\frac{1}{2}}(b,s)\right]^2 ds\} \le w(c) \qquad (8.10)$$

Nëse mbledhim anë për anë ekuacionin (8.8) dhe (8.10), fitojmë inekuacionin si më poshtë

$$\frac{1}{H^{\alpha+1}(c,a)}\int_a^c H^{\alpha+1}(s,a)q(s)v(s) - \frac{v(s)r(s)}{4kg'(s)}\left(\frac{v'(s)}{v(s)} - \frac{p(s)}{r(s)} + (\alpha+1)h_1(s,a)H^{-\frac{1}{2}}(s,a)\right)^2]ds +$$

$$\frac{1}{H^{\alpha+1}(b,c)}\int_c^b H^{\alpha+1}(b,s)[q(s)v(s) - \frac{v(s)r(s)}{4kg'(s)}\left(\frac{v'(s)}{v(s)} - \frac{p(s)}{r(s)} - (\alpha+1)h_2(b,s)H^{-\frac{1}{2}}(b,s)\right)^2]ds \le 0$$

i cili është në kundërshtim me kushtin (8.4) , prej nga rrjedh se çdo zgjidhje e ekuacionit diferencial (8.1) ka së paku një zgjidhje në intervalin (a,b). Vërtetimi i teoremës është i tërësishëm.

Rezultati në vazhdim është një nga vargu i rrjedhojave të teoremës 1.

Teorema 8.2 [64]. Supozohet se vlejnë kushtet (A_1), (A_2), (A_3). Le të marrim se për cdo $t \ge t_0$ ekziston $v \in C^1([t_0,\infty),(0,\infty))$ dhe numrat realë a, b , $t_0 \le a < b$, për ndonjë $H \in W$ dhe $c \in (a,b)$ te vlej relacioni (8.4) , atëherë ekuacioni (8.1) është oshilues.

Vërtetim : Le të vëzhgojmë vargun e numrave realë , $t_1 \le t_2 \le t_3 \le \ldots$, që plotësojnë $t_n \to \infty$, kur $n \to \infty$. Nga kushtet e teoremës , për t_n , ekziston funksioni

$v \in C^1([t_0,\infty),(0,\infty))$ dhe një dyshe numrash realë a_n, b_n, $t_n \le a_n \le b_n$ ashtu që , për

çdo $H \in W$ dhe çdo $c_n \in (a_n, b_n)$, vlen

$$\frac{1}{H^{\alpha+1}(c_n,a_n)}\int_{a_n}^{c_n} H^{\alpha+1}(s,a_n)q(s)v(s)-\frac{v(s)r(s)}{4kg'(s)}(\frac{v'(s)}{v(s)}-\frac{p(s)}{r(s)}+(\alpha+1)h_1(s,a_n)H^{-\frac{1}{2}}(s,a_n))^2]ds+$$

$$\frac{1}{H^{\alpha+1}(b_n,c_n)}\int_{c_n}^{b_n} H^{\alpha+1}(b_n,s)[q(s)v(s)-\frac{v(s)r(s)}{4kg'(s)}(\frac{v'(s)}{v(s)}-\frac{p(s)}{r(s)}-(\alpha+1)h_2(b_n,s)H^{-\frac{1}{2}}(b_n,s))^2]ds>0$$

Tani, nga rezultati i teoremës 1 , një zgjidhje *x(t)* ka së paku një zero në intervalin (a_n, b_n). Për $a_n \to \infty$ dhe $b_n \to \infty$ kur $n \to \infty$ konkludojmë se vargu i zerove tenton në pambarim kur $n \to \infty$ për zgjidhjen $x(t)$. Prandaj konkludohet se ekuacioni diferencial (8.1) është oshilues.

Rrjedhim 8.1[64]: Le të supozohet se vlejnë A_1, A_2, A_3 . Nëse

$$\limsup_{t\to\infty}\int_k^t H^{\alpha+1}(s,a)\{v(s)q(s)-\frac{v(s)r(s)}{4kl}[\frac{v'(s)}{v(s)}-\frac{p(s)}{r(s)}+(\alpha+1)h_2(s,a)H^{-\frac{1}{2}}(s,a)]\}ds>0 \quad (8.11)$$

dhe

$$\limsup_{t\to\infty}\int_k^t H^{\alpha+1}(b,s)\{v(s)q(s)-\frac{v(s)r(s)}{4kl}[\frac{v'(s)}{v(s)}-\frac{p(s)}{r(s)}-(\alpha+1)h_2(b,s)H^{-\frac{1}{2}}(b,s)]\}ds>0 \quad (8.12)$$

për çdo $H \in X$, $v \in C^1([t_0,\infty),(0,\infty))$ dhe për çdo $k \ge t_0$, atëherë çdo zgjidhje e ekuacionit (8.1) është oshiluese.

Vërtetim: Për $k \ge t_0$, prej (8.11) nëse marrim $k = a$, dhe $c > a$, ne kemi

$$\frac{1}{H^{\alpha+1}(c,a)}\int_a^c H^{\alpha+1}(s,a)\{v(s)q(s)-\frac{v(s)r(s)}{4kl}[\frac{v'(s)}{v(s)}-\frac{p(s)}{r(s)}+(\alpha+1)h_1(s,a)H^{-\frac{1}{2}}(s,a)]\}ds>0 \quad (8.13)$$

Prej (8.12) për $k = c$ dhe për ndonjë $b > c$, kemi

$$\frac{1}{H^{\alpha+1}(b,c)}\int_c^b H^{\alpha+1}(b,s)\{v(s)q(s)-\frac{v(s)r(s)}{4kl}[\frac{v'(s)}{v(s)}-\frac{p(s)}{r(s)}-(\alpha+1)h_2(b,s)H^{-\frac{1}{2}}(b,s)]\}ds>0 \quad (8.14)$$

Nëse mbledhim anë për anë (8.13) dhe (8.14) ,fitojmë inekuacionin e teoremës 1. Tani vërtetimi është i kompletuar.

Teorema në vazhdim jep një kriter tjetër oshilimi për ekuacionit (8.1) .

Teorema 8.3[64] : Supozohet se vlejnë A_1, A_2, A_3 dhe $H \in X$. Nëse ekziston funksioni $R \in C([t_0,\infty),R^+)$, $R,\rho \in C^1([t_0,\infty),R^+)$ dhe

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H^{\alpha+1}(t,s)}\int_{t_0}^{t} H^{\alpha+1}(t,s)(F(s)-\frac{\phi^2(t,s)r(s)\rho(s)}{4kl})ds=\infty \quad (8.15)$$

ku

$$F(s)=\rho(s)(q(s)-\frac{R(s)p(s)}{r(s)}-R^2(s)) \quad (8.16)$$

$$\phi(t,s)=(\alpha+1)(h_2(t,s)H^{-\frac{1}{2}}(t,s)+\rho'(s)-\frac{p(s)}{r(s)}+\frac{klR(s)}{r(s)} \quad (8.17)$$

atëherë ekuacioni (8.1) është oshilues.

Vërtetim: Le të supozohet e kundërta se *x(t)* është zgjidhje jooshiluese në intervalin $[T,\infty)$, $T \geq t_0$ të ekuacionit diferencial (8.1). Pa humbur përgjithësimi mund të marrim $x(t)\neq 0$. Supozohet se $x(t)$ është pozitiv në intervalin $[T,\infty)$(rasti kur $x(t)<0$, mund të trajtohet ngjashëm)

Atëherë nga $w(t)=\rho(t)[\frac{r(t)x'(t)}{f(g(x(t)))}+R(t)]$,

nëse derivojmë , kemi

$$w'(t)=\rho'(t)[\frac{r(t)x'(t)}{f(g(x(t)))}+R(t)]+\rho(t)\,[\frac{r(t)x'(t)}{f(g(x(t)))}+R(t)]'$$

duke përdor kushtet (A_1), (A_2), (A_3) dhe (8.1) ,fitojmë

$$w'(t)=\rho'(t)[\frac{r(t)x'(t)}{f(g(x(t)))}+R(t)]-\frac{\rho(t)p(t)x'(t)}{f(g(x(t)))}-\rho(t)q(t)-$$

$$\frac{\rho(t)r(t)x'(t)f'(g(x(t))g'(x(t))x'(t)}{f^2(g(x(t)))}+\rho(t)R^2(t)$$

$$w'(t)\le\rho'(t)w(t)-\frac{p(t)}{r(t)}w(t)+\rho(t)(\frac{R(t)}{r(t)}-q(t)+R^2(t))-\frac{kl}{r(t)\rho(t)}w^2(t)+\frac{kl\cdot R(t)}{r(t)}w(t)$$

$$F(t)\le -w'(t)+\rho'(t)w(t)-\frac{p(t)}{r(t)}w(t)-\frac{kl}{r(t)\rho(t)}w^2(t)+\frac{kl\cdot R(t)}{r(t)}w(t) \tag{8.18}$$

Shumëzojmë (8.18) me $H^{\alpha+1}(t,s)$, dhe integrojmë prej T deri t, ku $t\ge T\ge t_0$,

$s\in(T,t)$, dhe nëse përdorim (8.17), kemi

$$\int_T^t H^{\alpha+1}(t,s)F(s)ds\le-\int_T^t H^{\alpha+1}(t,s)w'(s)ds+\int_T^t H^{\alpha+1}(t,s)(\rho'(s)-\frac{p(s)}{r(s)}+\frac{kl\cdot R(s)}{r(s)})w(s)ds-$$

$$-\int_T^t H^{\alpha+1}(t,s)\frac{kl}{r(s)\rho(s)}w^2(s)ds$$

$$\int_T^t H^{\alpha+1}(t,s)F(s)ds\le -H^{\alpha+1}(t,s)w(s)\Big|_T^t+\int_T^t(\alpha+1)H^{\alpha}(t,s)h_2(t,s)\sqrt{H(t,s)}w(s)ds+$$

$$+\int_T^t H^{\alpha+1}(t,s)(\rho'(s)-\frac{p(s)}{r(s)}+\frac{kl\cdot R(s)}{r(s)})w(s)ds-\int_T^t H^{\alpha+1}(t,s)\frac{kl}{r(s)\rho(s)}w^2(s)ds$$

$$\int_T^t H^{\alpha+1}(t,s)F(s)ds\le H^{\alpha+1}(t,T)w(T)+\int_T^t H^{\alpha+1}(t,s)\phi(t,s)w(s)ds-\int_T^t H^{\alpha+1}(t,s)\frac{kl}{r(s)\rho(s)}w^2(s)ds$$

$$\int_T^t H^{\alpha+1}(t,s)F(s)ds\le H^{\alpha+1}(t,T)w(T)-\int_T^t H^{\alpha+1}(t,s)\left(w(s)\sqrt{\frac{kl}{r(s)\rho(s)}}-\frac{\phi(t,s)}{2}\sqrt{\frac{r(s)\rho(s)}{kl}}\right)^2ds+$$

$$+\int_T^t H^{\alpha+1}(t,s)\frac{\phi^2(t,s)r(s)\rho(s)}{4kl}ds$$

prej nga

$$\int_T^t H^{\alpha+1}(t,s)(F(s)-\frac{\phi^2(t,s)r(s)\rho(s)}{4kl})ds \le H^{\alpha+1}(t,T)w(T) \le H^{\alpha+1}(t,T)|w(T)| \le H^{\alpha+1}(t,T)|w(T)| \quad (8.19)$$

Për $t \ge T \ge T_0 \ge t_0$ dhe (8.19) , kemi

$$\int_{t_0}^t H^{\alpha+1}(t,s)(F(s)-\frac{\phi^2(t,s)r(s)\rho(s)}{4kl})ds \le \int_{t_0}^{T_0} H^{\alpha+1}(t,s)(F(s)ds - \int_{t_0}^{T_0} \frac{\phi^2(t,s)r(s)\rho(s)}{4kl})ds +$$

$$+\int_{T_0}^t H^{\alpha+1}(t,s)(F(s)-\frac{\phi^2(t,s)r(s)\rho(s)}{4kl})ds \le \int_{t_0}^{T_0} H^{\alpha+1}(t,s)(F(s)ds + H^{\alpha+1}(t,t_0)|w(T_0)| \le$$

$$H^{\alpha+1}(t,t_0)\int_{t_0}^{T_0}(F(s)ds + H^{\alpha+1}(t,t_0)|w(T_0)| = H^{\alpha+1}(t,t_0)(\int_{t_0}^{T_0}(F(s)ds + |w(T_0)|)$$

prej nga

$$\frac{1}{H^{\alpha+1}(t,t_0)}\int_{t_0}^t H^{\alpha+1}(t,s)(F(s)-\frac{\phi^2(t,s)r(s)\rho(s)}{4kl})ds \le \int_{t_0}^{T_0}(F(s)ds + |w(T_0)| < \infty$$

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H^{\alpha+1}(t,s)}\int_{t_0}^t H^{\alpha+1}(t,s)(F(s)-\frac{\phi^2(t,s)r(s)\rho(s)}{4kl})ds \le \int_{t_0}^{T_0}(F(s)ds + |w(T_0)| < \infty$$

që është në kundërshtim me kushtin e dhënë në (8.15) . Rrjedhimisht kemi vërtetim të tërësishëm të teoremës.

Teorema 3. mund të formulohet edhe në formë tjetër si në vijim:

Rrjedhim 8.2 [64]. : Në kushtet e teoremës 3 , nëse

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H^{\alpha+1}(t,s)}\int_{t_0}^t H^{\alpha+1}(t,s)(F(s)-\frac{\phi^2(t,s)r(s)\rho(s)}{4kl})ds = \infty$$

zëvendësohet me

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H^{\alpha+1}(t,t_0)}\int_{t_0}^t H^{\alpha+1}(t,s)F(s)ds = \infty \quad (8.20)$$

dhe plotësohet

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H^{\alpha+1}(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} H^{\alpha+1}(t,s) \frac{\phi^2(t,s) r(s) \rho(s)}{4kl} ds < \infty \tag{8.21}$$

atëherë ekuacioni (8.1) është oshilues.

Vërtetim : Me një kalkulim të thjeshtë mund të vërehet se ekuacioni (8.15) nga teorema 3. është rrjedhim i kushteve (8.20) dhe (8.21) . Rrjedhimisht ekuacioni (8.1) është oshilues.

Shembull 8.1[64]: Konsiderojmë ekuacionin diferencial

$$x''(t) - \cos t x'(t) + \frac{2}{1+\cos^2 t}(x(\frac{t}{2}) + x^3(\frac{t}{2})) = 0, \quad t > 0 \tag{8.22}$$

Për $r(t) = 1$, $p(t) = -\cos t$, $g(t) = \frac{t}{2}$ dhe $f(x) = x + x^3$, $f'(x) = 1 + 3x^2 \geq 1 = k$,

nga rrjedhimi 1, konkludojmë se ekuacioni (8.22) është oshilues.

Autori në [43] ka prezentuar një kriter të rëndësishëm për ekuacionin diferencial jolinearë të rendit të dytë me kufizë që shuhet të formës

$$(a(t)\psi(t)x'(t))' + p(t)x'(t) + q(t)f(x(t)) = 0 \tag{8.23}$$

ku $a \in C([t_0,\infty),\Re_+)$, $p,q \in C([t_0,\infty),\Re)$, $\psi \in C(\Re, R_+)$ dhe $f \in C^1([t_0,\infty),\Re)$, nën supozimin se $xf(x) > 0$, për $x \neq 0$, për $x \in \Re$ të vlej $f'(x) \geq k$ dhe $c \leq \psi(x) \leq c_1$, ku k, c dhe c_1 janë numra pozitivë.

Teorema 8.4 [43] : Le të jenë dhënë kushtet $f'(x) \geq k$ dhe $c \leq \psi(x) \leq c_1$, si dhe bashkësia $D = \{(t,s)/ t \geq s \geq t_0\}$. Le të marrim funksionin $H \in (D,\Re)$ që plotëson kushtet

i) $H(t,t) = 0$, për $t \geq t_0$, $H(t,s) > 0$, për $t > s \geq t_0$.

ii) H ka derivate parciale (të pjesshme) jopozitive në D në respekt të ndryshores së dytë.

Nëse ekziston $h \in C(D,\Re)$ dhe funksioni i diferencueshëm

$\rho : [t_0,\infty) \to (0,\infty)$, ashtu që

$$-\frac{\partial H(t,s)}{\partial s} = h(t,s)\sqrt{H(t,s)}\,, \text{ për çdo } (t,s) \in D$$

dhe

$$\limsup_{t\to\infty}\left(X(t,t_0) - \frac{1}{4kc}Y(t,t_0)\right) = \infty \text{, ku} \tag{8.24}$$

$$X(t_0,t) = \frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t} H(t,s)Q(s)ds$$

$$Q(s) = q(t) - \frac{1}{4k}\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{c_1}\right)\frac{p^2(t)}{a(t)}, \quad t \geq 1$$

$$Y(t_0,t) = \frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t} a(s)\rho(s)\{(\frac{p(s)}{a(s)} - \frac{c_1\rho'(s)}{\rho(s)})\sqrt{H(t,s)} + c_1h(t,s)\}^2\,ds\,,$$

atëherë ekuacioni (8.23) është oshilues.

Po e japim vërtetimin në disa hapa, shkurtimisht.

Vërtetim : Supozohet e kundërta , se ekuacioni (8.23) ka zgjidhje jooshiluese .Si zakonisht , pa humbur në përgjithësim , marrim $x(t) > 0$, për $t \geq T_0$, ku $T_0 \geq t_0$.

Vërtetimi për rastin kur $x(t) < 0$ bëhet në mënyrë të ngjashme.

Përkufizohet funksioni

$$W(t) = \rho(t)\frac{a(t)\psi(x(t))x'(t)}{f(x(t))}, \quad t \geq T_0. \tag{8.25}$$

Diferencojmë ekuacionin (25) dhe përdorim kushtet e teoremës , marrim

$$W'(t) \leq -\rho(t)Q(t) - \frac{1}{c_1}\left[\frac{k}{a(t)\rho(t)}W^2(t) + r(t)W(t)\right], \tag{8.26}$$

ku

$$r(t)=\frac{p(t)}{a(t)}-\frac{c_1\rho'(t)}{\rho(t)}.$$

Nëse ekuacionin (8.26) e shumëzojmë me $H(t,s)$, integrojmë prej t deri T , ku

$t\ge T\ge T_0$, dhe përdorim kushtet i) dhe (ii , kemi

$$\int_T^t H(t,s)\rho(s)Q(s)ds\le H(t,T)W(T)-$$

$$-\frac{1}{c_1}\int_T^t\left[\frac{kH(t,s)}{a(s)\rho(s)}W^2(s)+\left\{c_1h(t,s)\sqrt{H(t,s)}+r(s)H(t,s)\right\}W(s)\right]ds=$$

$$=H(t,T)\{W(T)-J(t,T)\}+\int_T^t\frac{a(s)\rho(s)}{4kc_1}\left[r(s)\sqrt{H(t,s)}+c_1h(t,s)\right]^2ds \tag{8.27}$$

ku

$$J(t,T)=\frac{1}{c_1H(t,T)}\int_T^t\left[\sqrt{\frac{kH(t,s)}{a(s)\rho(s)}W(s)}+\sqrt{\frac{a(s)\rho(s)}{4k}}\left\{r(s)\sqrt{H(t,s)}+c_1h(t,s)\right\}\right]^2ds$$

Tani , inekuacioni (8.27) implikon

$$H(t,T_0)\left[X(t,T_0)-\frac{1}{4kc_1}Y(t,T_0)\right]\le H(t,T_0)W(T_0)\le H(t,t_0)\left|W(T_0)\right|. \tag{8.28}$$

Në mbështetje të (8.27) dhe (8.28) mund të shkruajmë

$$H(t,T_0)\left[X(t,T_0)-\frac{1}{4kc_1}Y(t,T_0)\right]=\int_{t_0}^{T_0}\left[H(t,s)\rho(s)Q(s)-\frac{a(s)\rho(s)}{4kc_1}\left\{r(s)\sqrt{H(t,s)}+c_1h(t,s)\right\}^2\right]ds+$$
$$+\int_{T_0}^{t}\left[H(t,s)\rho(s)Q(s)-\frac{a(s)\rho(s)}{4kc_1}\left\{r(s)\sqrt{H(t,s)}+c_1h(t,s)\right\}^2\right]ds\le$$

$$\le H(t,t_0)\int_{t_0}^{T_0}\left|\rho(s)Q(s)\right|ds+H(t,t_0)\left|W(T_0)\right|$$

për $t\ge T_0$, prej nga përfundimisht marrim

$$\limsup_{t\to\infty}[X(t,t_0)-\frac{1}{4kc_1}Y(t,t_0)]\le\int_{t_0}^{T_0}\left|\rho(s)Q(s)\right|ds+H(t,t_0)\left|W(T_0)\right|.$$

Meqë inekuacioni i fundit është kontradiktorë me ekuacionin (8.24) të teoremës , konkludojmë se ekuacioni (8.23) është oshilues . Teorema u vërtetua tërësisht.

Duke shkuar më tej në këtë drejtim Autori në [46] për ekuacionin më të përgjithësuar diferencial jolinearë me vonesa të trajtës

$$a(t)x'(t))'+p(t)x'(\sigma(t))+q(t)f(x(g(t))=0\,,\quad t\geq t_0\,. \qquad (8.29)$$

prezenton këtë:

Teorema 8.5 [46] : Le të jenë $a,p,q,g,\sigma\in C([t_0,\infty),\Re^+)$. Nëse ekziston funksioni $\rho\in C^1([t_0,\infty),\Re^+)$, ashtu që

$$\sigma(t)<t \quad \text{dhe} \quad \sigma'(t)>0\,,\ \text{për}\ \ t\geq t_0\,, \qquad (8.30)$$

$$\rho'(t)>0 \quad \text{dhe} \quad \left(\frac{\rho(t)p(t)}{\sigma'(t)}\right)'\leq 0\,,\ \ t\geq t_0 \qquad (8.31)$$

$$\int_{t_0}^{\infty}\rho(s)q(s)ds=\infty \qquad (8.32)$$

$$\liminf_{t\to\infty}\int_{\sigma(t)}^{t}\frac{p(s)}{a(\sigma(s))}ds>\frac{1}{e} \qquad (8.33)$$

dhe

$$\int_{t_0}^{\infty}\frac{1}{a(s)\rho(s)}\int_{t_0}^{t}\rho(u)q(u)duds=\infty \qquad (8.34)$$

atëherë çdo zgjidhje e ekuacionit (8.29) është oshiluese ose $x(t)\to\infty$, kur $t\to\infty$.

Poashtu duke përdorur krahas kushteve të cituara më sipër edhe kushtin $\sigma(t)<t$, në [26] autori për rastet me ose pa vonesa vërteton këtë teoremë:

Teorema 8.6 [26] : Le të vlejë

$$a,p,q,g,\sigma\in C([t_0,\infty),\Re^+),\ \ g'(t)>0\,,\ \sigma'(t)>0\,,\ a(t)>0\,,\ q(t)>0 \qquad (8.35)$$

$$f\in C(\Re,\Re),\quad uf(u)>0\,,\ \text{për}\ \ u\neq 0 \qquad (8.36)$$

$\frac{f(u)}{u} \geq k$, për ndonjë numër pozitiv k (8.37)

dhe

$$g(t) \leq \sigma(t) \leq t .$$

Poashtu qëndron $\rho \in C^1([t_0,\infty),\Re^+)$, dhe relacionet (8.31), (8.32), (8.34). Nëse

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} \left(\rho(s)q(s) - \frac{(\rho'(s))^2 a(g(s))}{4k\rho(s)g'(s)} \right) ds = \infty \tag{8.38}$$

atëherë çdo zgjidhje e ekuacionit (8.29) është oshiluese ose $x(t) \to \infty$, kur $t \to \infty$.

Për ekuacionin (8.29) autori në [26] duke përdor kushtin e të mesmes integrale të tipit Kamenev vërteton këtë teoremë :

Teorema 8.7 [26] : Supozojmë se vlejnë të gjitha kushtet e teoremës 3. për veç kushtit (8.38) i cili zëvendësohet me

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1`}{t} \int_{t_0}^{t} (t-s)^n [\rho(s)q(s) - \frac{(\rho'(s))^2 a(g(s))}{4k\rho(s)g'(s)}] ds = \infty \tag{8.39}$$

atëherë çdo zgjidhje e ekuacionit (8.29) është oshiluese ose $x(t) \to \infty$, kur $t \to \infty$.

Në konceptin Phillo duke përdor të mesmen integrale , autori në [26] për ekuacionin (8.29) vërteton :

Teorema 8.8[26] : Le të vlejnë kushtet (8.35) - (8.37) dhe $g(t) \leq \sigma(t) \leq t$. Marrim $\rho \in C^1([t_0,\infty),\Re^+)$ që të vlejnë (8.31), (8.32) dhe (8.34) . Le të gjenden funksionet tani më të njohura H dhe h si dhe nën supozimin se vlen

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1`}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} [kH(t,s)\rho(s)q(s) - \frac{\rho(s)a(g(s))Q^2(t,s)}{4kg'(s)}] ds = \infty \tag{8.40}$$

ku

$$Q(t,s) = h(t,s) - \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} \sqrt{H(t,s)} \tag{8.41}$$

atëherë çdo zgjidhje e ekuacionit (8.29) është oshiluese ose $x(t) \to \infty$, kur $t \to \infty$.

Në vazhdim po paraqesim një kriter tjetër me kushtet e teoremës 5 i cili kushtin (40) e zëvendëson me disa nën kushte si në :

Teorema 8.9.[26] : Supozojmë se vlejnë të gjitha kushtet e teoremës 5. , përjashtuar kushti (8.40). Tani , për

$$0 < \inf_{s \ge t_0} \left[\liminf_{t \to \infty} \frac{H(t,s)}{H(t,t_0)} \right] \le \infty \tag{8.42}$$

dhe

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} \frac{Q^2(t,s)}{W(s)} ds < \infty . \tag{8.43}$$

Poashtu le të jetë $\psi \in C \in ([t_0,\infty),\Re)$, ashtu që për $t \ge t_0$,

$$\limsup_{t \to \infty} \int_{t_0}^{t} \psi_+^2(s) W(s) ds = \infty \tag{8.44}$$

ku

$$\psi_+(t) = \max\{\psi(t),0\}$$

dhe

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{1`}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} [kH(t,s)\rho(s)q(s) - \frac{Q^2(t,s)}{4W(s)}] ds \ge \sup_{t \to \infty} \psi(t) \tag{8.45}$$

atëherë çdo zgjidhje e barazimit (8.29) është oshiluese ose $x(t) \to \infty$, kur $t \to \infty$.

Në përmbajtjen e njëjtë të kushteve, me disa ndryshime më vonë është studiuar ekuacioni diferencial i ashtuquajtur me vonesa i formës :

$$(a(t)(y(t) + p(t)y'(t-\tau))' + q(t)\left|y(\sigma(t))\right|^{\alpha-1} y(\sigma(t)) = 0 \tag{8.46}$$

ku ndërtohen disa kritere të rëndësishme për oshilimin e zgjidhjeve të tij të cilat kritere janë përgjithësime të atyre që i cekëm më herët. Autori për këtë ekuacion përdor shënimet

$$Q(t) = q(t)(1 - p(\sigma(t)))^{\alpha},$$

$$k(t) = \frac{N_1^2 a(\sigma(t))}{\alpha^2 \sigma'(t)} \int_{t_1}^{\sigma(t)} \frac{a(\sigma(s))}{\sigma'(s)\phi(s)a^2(s)} ds,$$

për ndonjë konstant N_1 dhe $t_1 \geq t_0$

ku

$$\phi(t) = \exp\left(-2\int^{t} \phi(\xi)d\xi \right),$$

$$\beta(t) = \phi(t)\left(1 - \frac{a(t)}{k(t)} \right),$$

$$\psi(t) = \phi(t)\left(Q(t) + \frac{1}{k(t)}(a(t)\phi(t))^2 - a(t)\phi(t)' \right)$$

dhe vërteton këtë pohim :

Teorema 8.10 [46] : Supozohet se ekziston funksioni negativ $\phi \in C^1([t_0, \infty))$, ashtu që

$$\left(\frac{\phi'(t)a(\sigma(t))}{\sigma'(t)} \right)' \leq 0, \text{ për } t \geq t_0 \tag{8.47}$$

dhe

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} \phi(s)Q(s)ds > 0 \tag{8.48}$$

ku ekzistojnë funksionet $H, h : D \to \Re$, ashtu që

i) $H(t,t) = 0$, për $t \geq t_0$

ii) $H(t,s) > 0$, për $t > s \geq t_0$

iii) H ka derivate të pjesshëm jopozitivë në D sipas ndryshores së dytë .

Tani, nën supozimin se ekziston funksioni $v \in C^1([t_0,\infty),(0,\infty))$ për $T \geq t_0$, ashtu që

$$-\frac{\partial}{\partial s}[H(t,s)v(s)] + 2H(t,s)v(s)\phi(s)\left(1-\frac{a(s)}{k(s)}\right) = h(t,s)\sqrt{H(t,s)v(s)},$$

poashtu për T mjaft të madh ,

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1`}{H(t,T)}\int_T^t [H(t,s)v(s)\psi(s) - \frac{\phi(s)k(s)h^2(t,s)}{4}]ds = \infty \tag{8.49}$$

atëherë ekuacioni (8.46) është oshilues për $\alpha > 1$.

Poashtu për ekuacionin (8.24) vërteton edhe këtë :

Teorema 8.11 [46] Nën supozimin se vlejnë (8.47) , (8.48) dhe funksionet *H, h* që janë definuar si në teoremën 7 dhe supozimin se vlen :

$$0 < \inf_{s\geq t_0}\left[\liminf_{t\to\infty}\frac{H(t,s)}{H(t,t_0)}\right] \leq \infty. \tag{8.50}$$

Nëse ekziston funksioni $\varphi \in C^1([t_0,\infty),\Re)$, ashtu që

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1`}{H(t,T)}\int_T^t \phi(s)k(s)h^2(t,s)ds < \infty, \tag{8.51}$$

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1`}{H(t,T)}\int_T^t [H(t,s)v(s)\psi(s) - \frac{\phi(s)k(s)h^2(t,s)}{4}]ds \geq \varphi(T) \tag{8.52}$$

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,T)}\int_T^t \frac{\varphi^2{}_+(s)}{v(s)\phi(s)k(s)}ds = \infty \tag{8.53}$$

ku

$$\varphi_+(s) = \max\{\varphi(s),0\},$$

atëherë ekuacioni (8.46) është oshilues për çdo $\alpha > 1$.

Në rrethana të ngjashme më vonë autori në [45] për ekuacionin e formës

$$(r(t)\psi(t)k(x'(t)))'+p(t)k(x'(t))+q(t)f(x(t))g(x'))=0,\ t\geq t_0 \qquad (8.54)$$

vërteton këtë :

Teorema 8.12 [45]: Supozojmë se vlen :

$r(t)>0$ dhe $xf(x)>0$, për çdo $x\neq 0$;

$0<c\leq\psi(x(t)\leq c_1$, për çdo x;

$\gamma_1>0$ dhe $k^2(y)\leq\gamma_1 yk(y)$, për çdo $y\in\Re$;

$q(t)\geq 0$ dhe $0<c_2\leq g(x'(t))$;

$f'(x)$, ekziston , $f'(x)\geq\gamma_2>0$, për çdo $x\neq 0$

dhe H, ashtu që

i) $H(t,t)=0,\quad H(t,s)>0$, për $t\geq t_0$ në $D=\{(t,s)/t>s\geq t_0\}$

ii) H ka derivate të pjeshme të vazhdueshme në D në respekt të ndryshores së dytë.

iii) Gjendet funksioni $h(t,s)\in C(D,\Re)$, ashtu që

$$-\frac{\partial H(t,s)}{\partial s}=h(t,s)\sqrt{H(t,s)},$$

Supozohet se

$$0<\inf_{s\geq t_0}\left[\liminf_{t\to\infty}\frac{H(t,s)}{H(t,t_0)}\right]\leq\infty \qquad (8.55)$$

Nëse ekziston funksioni $R,\phi\in C([t_0,\infty),\Re^+)$ dhe $\rho\in C^1([t_0,\infty),\Re^+)$, ashtu që

$(rR)\in C^1([t_0,\infty),\Re)$ dhe

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t}\rho(s)r(s)h_1^2(t,s)ds<\infty \qquad (8.56)$$

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} \frac{\phi^2{}_+(s)}{\rho(s)r(s)} ds < \infty \qquad (8.57)$$

dhe për ndonjë $T \geq t_0$

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1`}{H(t,T)} \int_{T}^{t} [H(t,s)Q_1(s) - \frac{c_1\gamma_1}{4\gamma_2} \rho(s)r(s)h_1^2(t,s)]ds \geq \phi(T) \qquad (8.58)$$

ku

$$Q_1(t) = \rho(t)\{c_2 q(t) - [R(t)r'(t)] - \frac{1}{c_1} p(t)R(t) + \frac{\gamma_2}{c_1\gamma_1} r(t)R^2(t) - \frac{\gamma_1}{4\gamma_2}(\frac{1}{c} - \frac{1}{c_1})\frac{p^2(t)}{r(t)}\},$$

$$h_1(t,s) = h(t,s) - \sqrt{H(t,s)}(\frac{\rho'(s)}{\rho(s)} + 2\frac{\gamma_2}{c_1\gamma_1} R(s) - \frac{p(s)}{c_1 r(s)})$$

dhe

$$\phi_+(s) = \max\{\phi(s), 0\},$$

atëherë ekuacioni diferencial (8.54) është oshilues.

9. Kritere oshiluese për ekuacionin diferencial të turbulluar të rendit të dytë

Objekt studimi në vitet e fundit në teorinë e oshilacionit ka qenë edhe barazimi diferencial i rendit të dytë i formës:

$$(a(t)x'(t))' + P(t)f(x) + Q(t,x) = R(t,x,x') \tag{9.1}$$

ku koeficientët janë funksione të vazhdueshme dhe *a(t)* pozitiv . Kreteret në vazhdim bazohen në rezultatet e cituara në [3],[4],[8] dhe [9] te të cilët mungon anëtari *p(t)f(x)* i barazimit (9.1). Ky barazim në literatur quhet diferencial i turbulluar i rendit të dytë.

Në këtë rast , marrim kushtet:

$$f:\Re \to \Re, P:[T_0,\infty) \to R, Q:[T_0,\infty] \times \Re \to \Re, \quad R:[T_0,\infty] \times \Re \times \Re \to \Re$$

funksione të vazhdueshme dhe

$$xf(x) > 0, \quad \text{për} \quad x \neq 0 \tag{9.2}$$

$$f'(x) \geq k > 0, \text{ për } \ x \neq 0 \tag{9.3}$$

$$\frac{R(t,x,x')}{f(x)} \leq r(t), \frac{Q(t,x)}{f(x)} \geq q(t), P(t) \geq p(t), \ \text{ për } \ x \neq 0 . \tag{9.4}$$

Me kushtet e mësipërme për ekuacionin (9.1) dhe duke u bazuar në razultatet e paraqitura në [4] është konstruktuar kriter mbi zgjidhjet oshiluese të paraqitur me teoremën në vazhdim .

Teorema 9.1 [19]. Le të supozojmë se vlejnë kushtet (9.2),(9.3),(9.4) dhe le të jetë ρ funksion me derivat të vazhdueshëm në intervalin $[T,\infty)$, ashtu që $\rho' \geq 0$ në $[T_0,\infty)$, atëherë ekuacioni (9.1) është oshilues , nëse

$$\lim_{t\to\infty}\int_{T_0}^{t}\frac{1}{\rho(s)a(s)}ds=\infty \tag{9.5}$$

$$\int_{T_0}^{t}R(s)ds=\infty \tag{9.6}$$

ku

$$R(t)=\rho(t)[p(t)+q(t)-r(t)]-\frac{\rho'^2(t)a(t)}{4k\rho(t)}.$$

Vërtetim : Le të supozojmë të kundërtën se *x(t)* është zgjidhje jooshiluese në intervalin $[T,\infty)$, $T\geq T_0$ e ekuacionit diferencial (9.1). Pa mënjanuar nga kuptimi i përgjithshëm , mund të supozohet se vlen $x(t)\neq 0$. Le të supozojmë se $x(t)$ është zgjidhje pozitive në intervalin $[T,\infty)$(rasti $x(t)<0$ mund të trajtohet në mënyrë të ngjashme).

Atëherë nga funksioni

$$w(t)=\frac{a(t)x'(t)}{f(x(t))} \tag{9.7}$$

kemi

$$w'(t)=\frac{(a(t)x'(t))'}{f(x(t))}-\frac{a(t)f'(x(t))x'^2(t)}{f^2(x(t))}$$

duke përdor (1), marrim

$$w'(t)\leq r(t)-q(t)-p(t)-\frac{kw^2(t)}{a(t)} \tag{9.8}$$

nëse e shumëzojmë (9.8) me $\rho(t)$, dhe integrojmë prej T deri t, kemi

$$\int_{T}^{t}\rho(s)w'(s)ds\leq\int_{T}^{t}\rho(s)[r(s)-q(s)-p(s)]ds-\int_{T}^{t}\rho(s)\frac{kw^2(s)}{a(s)}ds\ ,$$

duke përdorur (9.3) , kemi

$$\rho(t)w(t) \le C_T - \int_T^t \rho(s)[q(s)+p(s)-r(s)]ds + \int_T^t \rho'(s)w(s)ds - \int_T^t \rho(s)\frac{kw^2(s)}{a(s)}ds$$

ku

$$C_T = \rho(T)w(T) \ ,$$

dhe jobarazimi i mësipërm merr formën

$$\rho(s)w(s) \le C_T - \int_T^t \rho(s)[q(s)+p(s)-r(s)]ds - \int_T^t \frac{k\rho(s)}{a(s)}W^2(s)ds + \int_T^t \frac{\rho'^2(s)a(s)}{4k\rho(s)}ds \ ,$$

ku

$$W(t) = w^2(t) - \frac{\rho'(t)a(t)}{2k\rho(t)} \ .$$

Tani

$$\rho(s)w(s) \le C_T - \int_T^t [\rho(s)(q(s)+p(s)-r(s)) - \frac{\rho'^2(s)a(s)}{4k\rho(s)}]ds$$

$$\rho(s)w(s) \le C_T - \int_T^t R(s)ds \ ,$$

dhe nëse përdorim kushtin (9.6) në relacionin e fundit , marrim se limiti i $\rho(s)w(s)$

ku $t \to \infty$, është

$$\lim_{t\to\infty} \rho(t)w(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{\rho(t)a(t)x'(t)}{f(x)} = -\infty \ ,$$

prej nga marrim se $\exists T_1$ për $t \ge T_1$, të kemi $x'(t) < 0$.

Gjithashtu nga (9.6)

$$\int_T^\infty [\rho(s)(q(s)+p(s)-r(s))ds = \infty$$

dhe ekzistenca e $T_2 \ge T_1$, ashtu që

$$\int_{T_1}^{T_2} [\rho(s)(q(s)+p(s)-r(s))ds = 0$$

dhe

$$\int_{T_2}^{t}[\rho(s)(q(s)+p(s)-r(s))ds \geq 0 \text{ , për } t \geq T_2 .$$

Në anën tjetër , nëse (9.1) shumëzohet me $\rho(t)$ dhe integrojmë me pjesë , kemi

$$\rho(t)a(t)x'(t) \leq C_{T_2} + \int_{T_2}^{t}\rho'(s)a(s)x'(s)ds - \int_{T_2}^{t} f(x)\rho(s)(q(s)+p(s)-r(s))ds$$

$$\rho(t)a(t)x'(t) \leq C_{T_2} - f(x(t))\int_{T_2}^{t}\rho(s)(q(s)+p(s)-r(s))ds +$$

$$+\int_{T_2}^{t} x'(s)f'(x(s))\int_{T_2}^{s} \rho(s)(q(s)+p(s)-r(s))ds$$

duke konsideruar shenjën e $x'(t)$, për $t > T_1 \geq T_2$, fitojmë

$$\rho(t)a(t)x'(t) \leq C_{T_2} \quad \text{për} \quad t \geq T_1 . \tag{9.9}$$

Gjithashtu nga

$$\rho(t) > 0, a(t) > 0, x'(t) < 0$$

implikon

$$C_{T_2} = \rho(T_2)a(T_2)x'(T_2) < 0 \quad .$$

Tani nga (9.9), fitojmë

$$x(t) \leq C_{T_2}\int_{T_2}^{t}\frac{1}{\rho(s)a(s)}ds \ , \tag{9.10}$$

si dhe nga (9.5) dhe $C_{T_2} < 0$, mund të konkludojmë se $x(t) \to -\infty$, kur $t \to \infty$, që është në kundërshtim me supozimin tonë , kjo tregon se pohimi i teoremës është i vërtetë.

Në vazhdim paraqesim ekuacionin diferencial i cili plotëson kushtet e teoremës .

Shembull 9.1 : Konsiderojmë ekuacionin diferencial të rendit të dytë

$$(a(t)x'(t))'+tx+[\frac{1}{2\sqrt{t^3}}(3+\cos t)+te^x]x=\frac{x}{\sqrt{x}}\sin t+\frac{1}{t^3}\frac{x^3\cos x'}{x^2+5}$$

ku, për

$$f(x)=x,\quad a(t)=\log t\quad,\quad \rho(t)=t\quad \text{dhe}\quad t\geq\frac{\pi}{2}$$

nëse zgjedhim

$$P(t)\geq\frac{t}{2}=p(t),\quad \frac{Q(t,x)}{f(x)}\geq\frac{1}{2\sqrt{t^3}}(3+\cos t)=q(t),\ \text{dhe}\quad \frac{R(t,x,x')}{f(x)}\leq\frac{1}{\sqrt{t}}\sin t+\frac{1}{t^3}=r(t),$$

atëherë për çdo $t\geq T_0=\frac{\pi}{2}$,

kemi

$$\int_{T_0}^{t}R(s)ds=\int_{T_0}^{t}s[\frac{s}{2}+\frac{1}{2}s^{-\frac{3}{2}}(3+\cos s)-s^{-\frac{1}{2}}\sin s-\frac{1}{s^3}-\frac{1}{4}\frac{\log s}{s^2}]ds=$$

$$\int_{T_0}^{t}\frac{s^2}{2}ds+\int_{T_0}^{t}[\frac{1}{2}s^{-\frac{1}{2}}(3+\cos s)-s^{\frac{1}{2}}\sin s]ds-\int_{T_0}^{t}\frac{1}{s^2}ds-\int_{T_0}^{t}\frac{\log s}{s}=$$

$$\int_{T_0}^{t}\frac{s^2}{2}ds+\int_{T_0}^{t}d(s^{\frac{1}{2}}(3+\cos s)+\frac{1}{t}-\frac{2}{\pi}-\frac{1}{8}\log^2(t)+\frac{1}{8}\log^2(\frac{\pi}{2})\geq t^{\frac{1}{2}}-2(\frac{\pi}{2})^{\frac{1}{2}}-\frac{2}{\pi}-\frac{1}{8}\log^2 t\,.$$

Ku vërejmë se vlen

$$\int_{T_0}^{t}R(s)ds=\infty$$

dhe

$$\lim_{t\to\infty}\int_{T_0}^{t}\frac{1}{\rho(s)a(s)}ds=\int_{T_0}^{\infty}\frac{1}{s\log s}ds=\infty$$

d.m.th. plotësohen kushtet e teoremës 1. , rrjedhimisht ekuacioni diferencial në fjalë është oshilues.

Duke i përdor funksionet pozitive të Philos mund të vërtetohet edhe ky pohim.

Teorema 9.2[19] : Supozohet se vlejnë kushtet (9.2),(9.3), (9.4) dhe për $T \geq t_0$, nëse ekziston $(a,b) \subset [t_0,\infty)$, $c \in (a,b)$ dhe funksioni pozitiv $\rho \in C^1([t_0,\infty),R)$ ashtu që

$$\frac{1}{H(b,c)}\int_c^b \frac{a(s)\rho(s)}{4k}(h_2(b,s) - \rho'(s)\sqrt{H(b,s)})^2 ds + \frac{1}{H(c,a)}\int_c^b \frac{a(s)\rho(s)}{4k}(h_1(s,a) + \rho'(s)\sqrt{H(s,a)})^2 d$$

$$\frac{1}{H(b,c)}\int_c^b \rho(s)[r(s) - q(s) - p(s)]H(b,s)ds + \frac{1}{H(c,a)}\int_c^b \rho(s)[r(s) - q(s) - p(s)]H(s,a)ds < 0 \quad (9.11)$$

atëherë, çdo zgjidhje e ekuacionit (9.1) është oshiluese .

Vërtetim : Supozojmë të kundërtën , se *x(t)* është zgjidhje jooshiluese e barazimit (9.1), rrjedhimisht, marrim $x(t) \neq 0$ në intervalin $t \in [t_0,\infty)$.

Perkufizojmë

$$w(t) = \frac{\rho(t)a(t)x'(t)}{f(x)}$$

dhe kushtet (9.2),(9.3),(9.4), kemi

$$w'(t) \leq \rho'(t)w(t) + \rho(t)[r(t) - q(t) - p(t)] - \frac{kw^2(t)}{a(t)\rho(t)} . \qquad (9.12)$$

Nëse ekuacioni (9.12) shumëzohet me funksioni jonegativ $H(t,s)$, fitojmë

$$H(t,s)w'(t) \leq H(t,s)\rho'(t)w(t) + \rho(t)[r(t) - q(t) - p(t)]H(t,s) - \frac{kw^2(t)}{a(t)\rho(t)}H(t,s)$$

si dhe nëse integrojmë prej c deri në t , ku $t \in [c,b)$, marrim

$$\int_c^t H(t,s)w'(s)ds \leq \int_c^t H(t,s)\rho'(s)w(s)ds + \int_c^t \rho(s)[r(s) - q(s) - p(s)]H(t,s)ds -$$

$$-\int_c^t k\frac{w^2(s)}{a(s)\rho(s)}H(t,s)ds$$

$$w(s)H(t,s)\Big|_c^t - \int_c^t w(s)\frac{\partial H(t,s)}{\partial s}ds \le \int_c^t H(t,s)\rho'(s)w(s)ds + \int_c^t \rho(s)[r(s)-q(s)-p(s)]H(t,s)ds -$$

$$-\int_c^t k\frac{w^2(s)}{a(s)\rho(s)}H(t,s)ds,$$

$$-w(c)H(t,c) + \int_c^t w(s)h_2(t,s)\sqrt{H(t,s)}ds \le$$

$$\le \int_c^t H(t,s)\rho'(s)w(s)ds + \int_c^t \rho(s)[r(s)-q(s)-p(s)]H(t,s)ds - \int_c^t k\frac{w^2(s)}{a(s)\rho(s)}H(t,s)ds,$$

$$-w(c)H(t,c) \le -\int_c^t w(s)h_2(t,s)\sqrt{H(t,s)}ds +$$

$$+\int_c^t H(t,s)\rho'(s)w(s)ds + \int_c^t \rho(s)[r(s)-q(s)-p(s)]H(t,s)ds - \int_c^t k\frac{w^2(s)}{a(s)\rho(s)}H(t,s)ds,$$

$$-w(c)H(t,c) \le -\int_c^t k\frac{H(t,s)}{a(s)\rho(s)}[w^2(s) + \frac{a(s)\rho(s)}{kH(t,s)}(h_2(t,s)\sqrt{H(t,s)} - H(t,s)\rho'(s))w(s)]ds +$$

$$+\int_c^t \rho(s)[r(s)-q(s)-p(s)]H(t,s)ds,$$

$$-w(c)H(t,c) \le -\int_c^t k\frac{H(t,s)}{a(s)\rho(s)}[w(s) + \frac{a(s)\rho(s)}{2kH(t,s)}(h_2(t,s)\sqrt{H(t,s)} - H(t,s)\rho'(s))]^2 ds +$$

$$+\int_c^t a(s)\frac{\rho(s)}{4kH(t,s)}[(h_2(t,s)\sqrt{H(t,s)} - H(t,s)\rho'(s))]^2 ds + \int_c^t \rho(s)[r(s)-q(s)-p(s)]H(t,s)ds,$$

$$-w(c)H(t,c) \le \int_c^t a(s)\frac{\rho(s)}{4kH(t,s)}[(h_2(t,s)\sqrt{H(t,s)} - H(t,s)\rho'(s))]^2 ds +$$

$$+\int_c^t \rho(s)[r(s)-q(s)-p(s)]H(t,s)ds.$$

Nëse pjesëtohet me H(t,s) dhe për $t \to b_-$, fitojmë

$$-w(c) \le \frac{1}{H(b,c)}\int_c^b \{a(s)\frac{\rho(s)}{4k}[(h_2(b,s) - \sqrt{H(b,s)}\rho'(s))]^2 + \rho(s)[r(s)-q(s)-p(s)]H(b,s)\}ds, \quad (9.13)$$

Në anën tjetër , nëse e shumëzohet (9.12) me funksionin pozitiv H(s,t) dhe integrohet prej t deri c , ku $s \in (t,c]$, marrim

$$\int_t^c H(s,t)w'(s)ds \le \int_t^c H(s,t)\rho'(s)w(s)ds + \int_t^c \rho(s)[r(s)-q(s)-p(s)]H(s,t)ds -$$

$$-\int_t^c k\frac{w^2(s)}{a(s)\rho(s)}H(s,t)ds\,,$$

$$w(s)H(s,t)\Big|_t^c - \int_t^c w(s)h_1(s,t)\sqrt{H(s,t)}ds \le$$

$$\int_t^c H(s,t)\rho'(s)w(s)ds + \int_t^c \rho(s)[r(s)-q(s)-p(s)]H(s,t)ds - \int_t^c k\frac{w^2(s)}{a(s)\rho(s)}H(s,t)ds$$

$$w(c)H(c,t) \le$$

$$-\int_t^c H(s,t)\frac{k}{a(s)\rho(s)}[w^2(s) - 2\frac{a(s)\rho(s)}{2kH(s,t)}(H(s,t)\rho'(s) + h_1(s,t)\sqrt{H(s,t)})w(s)]ds$$

$$+\int_t^c \rho(s)[r(s)-q(s)-p(s)]H(s,t)ds\,,$$

$$w(c)H(c,t) \le$$

$$-\int_t^c H(s,t)\frac{k}{a(s)\rho(s)}[w(s) - \frac{a(s)\rho(s)}{2kH(s,t)}(H(s,t)\rho'(s) + h_1(s,t)\sqrt{H(s,t)})]^2 ds$$

$$+\int_t^c \frac{a(s)\rho(s)}{4kH(s,t)}[(H(s,t)\rho'(s) + h_1(s,t)\sqrt{H(s,t)})]^2 ds + \int_t^c \rho(s)[r(s)-q(s)-p(s)]H(s,t)ds\,,$$

$$w(c)H(c,t) \le \int_t^c \frac{a(s)\rho(s)}{4k}[\sqrt{H(s,t)}\rho'(s) + h_1(s,t)]^2 ds$$

$$+\int_t^c \rho(s)[r(s)-q(s)-p(s)]H(s,t)ds\,.$$

Nëse ekuacionin e fundit e pjesëtojmë me H(c,t) dhe për $t \to a_+$, kemi

$$w(c) \leq \frac{1}{H(c,a)} \int_a^c [\frac{a(s)\rho(s)}{4k} (\sqrt{H(s,a)}\rho'(s) + h_1(s,a))^2 + \rho(s)(r(s) - q(s) - p(s))H(s,a)]ds. \quad (9.14)$$

Nëse mblidhen anë për anë (9.13) dhe (9.14) , fitohet

$$\frac{1}{H(b,c)} [\int_c^b a(s) \frac{\rho(s)}{4k} [(h_2(b,s) - \sqrt{H(b,s)}\rho'(s))]^2 + \rho(s)[r(s) - q(s) - p(s)]H(b,s)]ds +$$

$$\frac{1}{H(c,a)} \int_a^c [\frac{a(s)\rho(s)}{4k} (\sqrt{H(s,a)}\rho'(s) + h_1(s,a))^2 + \rho(s)(r(s) - q(s) - p(s))H(s,a)]ds \geq 0$$

inekuacioni i fundit është në kundërshtim me kushtin (9.11) , prandaj konkludojmë se çdo zgjidhje e ekuacionit (9.1) është oshiluese. Kjo vërteton edhe teoremën.

Nëse konkretisht marrim funksionin

$$H(t,s) = (t-s)^n, \ (n > 1), \ t > s \geq t_0$$

prej nga

$$\frac{\partial H}{\partial t} = n(t-s)^{\frac{n}{2}-1} \sqrt{(t-s)^n}, \quad \frac{\partial H}{\partial s} = -n(t-s)^{\frac{n}{2}-1} \sqrt{(t-s)^n},$$

atëherë vlen :

Rrjedhim 9.1 [19]. :Le të supozohet se vlejnë kushtet (9.2),(9.3),(9.4) , atëherë çdo zgjidhje e ekuacionit (9.1) është oshiluese , nëse ekziston funksioni $\rho \in C^1([t_0,\infty), R)$ për $a \geq t_0$ dhe për $(n > 1)$, janë të vërteta inekuacionet

$$\limsup_{c \to \infty} \frac{1}{c^n} \int_a^c (s-a)^n \rho(s) [\frac{a(s)}{4k} (\rho'(s) + \frac{n}{s-a})^2 + (r(s) - p(s) - q(s)]ds > 0 \quad (9.15)$$

dhe

$$\limsup_{c \to \infty} \frac{1}{c^n} \int_a^c (c-s)^n \rho(s) [\frac{a(s)}{4k} (\rho'(s) + \frac{n}{c-s})^2 + (r(s) - p(s) - q(s)]ds > 0 \quad (9.16)$$

Me të vërtet mund të vërehet se jobarazimet (9.15) dhe (9.16) në kushtet e funksionit *H(t,s)* implikojnë ekuacionin (9.11) të teoremës prej nga është i qartë konkluzioni i rrjedhimit në fjalë.

Teorema 9.3[19].Supozojmë se kushtet (9.2),(9.3),(9.4) qëndrojnë për $T > t_0$, ku $\exists \rho(t) \in C^1([t_0,\infty),(0,\infty))$, ashtu që për ndonjë $u \in C[a,b]$, ku $u' \in L^2[a,b]$, dhe $u(a) = u(b) = 0$, nëse

$$\int_a^b u^2(s)\{\rho(s)[p(s)+q(s)-r(s)] - \frac{a(s)}{k}(\frac{u'(s)}{u(s)} - \rho'(s))^2\}ds > 0, \quad (9.17)$$

atëherë ekuacioni (9.1) është oshilues.

Vërtetim : Supozojmë të kundërtën . Rrjedhimisht marrim që *x(t)* është zgjidhje jooshiluese e ekuacionit (9.1) , themi $x(t) \neq 0$ në $[t_0,\infty)$ për ndonjë $T_0 > t_0$.

Prej funksionit

$$w(t) = \rho(t)\frac{a(t)x'(t)}{f(x(t))} \quad ,$$

nën kushtet (9.3) dhe (9.4) , kemi

$$w'(t) \leq \rho'(t)w(t) + \rho(t)(r(t) - q(t) - p(t)) - \frac{kw^2(t)}{a(t)}$$

të cilin nëse e shumëzojmë me $u^2(t) > 0$, dhe integrohet prej a deri në b, fitojmë

$$-2\int_a^b w(s)u(s)u'(s)ds \leq \int_a^b u^2(s)w(s)\rho'(s)ds +$$

$$+\int_a^b u^2(s)\rho(s)[r(s)-q(s)-p(s)]ds - \int_a^b u^2(s)\frac{kw^2(s)}{a(s)}ds,$$

$$\int_a^b \frac{ku^2(s)}{a(s)}[w(s) - (\frac{a(s)u'(s)}{k(u(s)} + \frac{a(s)}{k}\rho'(s))]^2 ds - \int_a^b \frac{a(s)u^2(s)}{k}(\frac{u'(s)}{u(s)} + \rho'(s))^2 ds \leq$$

$$\int_a^b u^2(s)\rho(s)(r(s)-q(s)-p(s))ds$$

ku $k>0,\ a(s)>0$, për $s>t_0$, dhe

$$\int_a^b u^2(s)\rho(s)(p(s)+q(s)-r(s))ds - \int_a^b \frac{a(s)u^2(s)}{k}\left(\frac{u'(s)}{u(s)}+\rho'(s)\right)^2 ds \leq 0$$

që është në kundërshtim me kushtin (9.17) të teoremës 3. , rrjedhimisht çdo zgjidhje e ekuacionit (9.1) është oshiluese .

10. Vazhdueshmëria dhe kufizueshmëria e zgjidhjeve oshiluese te ekuacionet diferenciale të rendit të dytë

Në fund për ekuacionin e përgjithshëm diferencial të rendit të dytë do të prezentohen disa pohime të cilat garantojnë vazhdueshmërinë , gjegjësisht kufizueshmërinë e zgjidhjeve .

Konsiderojmë ekuacionin e përgjithshëm diferencial të rendit të dytë

$$(a(t)x'(t))'+h(t,x(t),x'(t))+q(t)f(x(t))g(x'(t))=e(t,x(t),x'(t)) \qquad (10.1)$$

ku $a(t),q(t)\in C([t_0,\infty),R^+), f,g\in C(R,R)$ dhe $h,e\in C([t_0,\infty)xR^2,R)$ dhe $g(y)>0$ për çdo $y\in R$. Ekuacionin (10.1) e paraqesim në formë sistemi

$$\begin{cases} x'=y \\ y'=\dfrac{1}{a(t)}[-a'(t)y-h(t,x,y)-q(t)f(x)g(y)+e(t,x,y) \end{cases} \qquad (10.2)$$

Shënojmë $p^+(t)=\max\{p(t),o\}$ dhe $p^-(t)=\max\{-p(t),o\}$ prej nga

$$p(t)=p^+(t)-p^-(t)\,.$$

Përkufizojmë funksionet

$$F(x)=\int_0^x f(s)ds, G(y)=\int_0^y \frac{sds}{g(s)}$$

dhe supozojmë se ekziston funksioni $r(t)\in C([t_0,\infty),R)$ ashtu që

$$|e(t,x,y)\le r(t)| \qquad (10.3)$$

$$yh(t,x,y)\ge 0 \qquad (10.4)$$

dhe konstantat jonegative m dhe n ashtu që

$$\frac{|y|}{g(y)} \leq m + nG(y) \tag{10.5}$$

$$\frac{y^2}{g(y)} \leq MG(y), \text{ për } |y| \geq k. \tag{10.6}$$

shumë autorë zgjidhjet oshiluese i studiojnë në intervalin (α, ∞) prandaj në këtë drejtim vlen :

Teorema 10.1 [8]. Nëse kushtet (10.3),(10.4),(10.5) vlejnë dhe $a'(t) \geq 0$, $F(x)$ i kufizuar nga poshtë dhe $G(y) \to \infty$ kur $|y| \to \infty$, atëherë të gjitha zgjidhjet e ekuacionit (10.1) janë përkufizuar për $t \geq t_0$.

Vertetimi . Supozojmë se $(x(t), y(t))$ është zgjidhje e sistemit (10.2) me numër të fundëm këputjesh d.m.th. gjendet $T \geq t_0$ ashtu që $\lim_{t \to T^-}[|x(t)| + |y(t)|] = \infty$. Për derisa $F(x)$ është i kufizuar nga poshtë , $F(x) \geq -K$ për ndonjë konstantë $K > 0$.

Përkufizojmë

$$V(x, y, t) = \frac{1}{q(t)} G(y) + \frac{1}{a(t)}[F(x) + K],$$

atëherë

$$V_t^{'}(x, y, t) = -\frac{q'(t)}{q^2(t)} G(y) + \frac{1}{q(t)} G_t^{'}(y) - \frac{a'(t)}{a^2(t)}[F(x) + K] + \frac{1}{a(t)}[F_t^{'}(x) + 0]$$

$$V_t^{'}(x, y, t) = -\frac{q'(t)}{q^2(t)} G(y) + \frac{1}{q(t)} \frac{d(G(y))}{dy} \frac{dy}{dt} - \frac{a'(t)}{a^2(t)}[F(x) + K] + \frac{1}{a(t)} \frac{d(F(x))}{dx} \frac{dx}{dt}$$

$$V_t^{'}(x, y, t) = -\frac{q'(t)}{q^2(t)} G(y) + \frac{1}{q(t)} \frac{y}{g(y)} y' - \frac{a'(t)}{a^2(t)}[F(x) + K] + \frac{1}{a(t)} f(x) y$$

nëse zëvendësojmë *y'* nga sistemi , fitojmë

$$V'(x,y,t) = -\frac{q'(t)}{q^2(t)}G(y) - \frac{a'(t)}{a(t)q(t)g(y)} - \frac{1}{a(t)q(t)}h(t,x,y)(\frac{y}{g(y)}) +$$

$$+\frac{1}{a(t)q(t)}e(t,x,y)(\frac{y}{g(y)}) - \frac{a'(t)}{a^2(t)}[F(x)+K] \le$$

$$\le \frac{[q'(t)]^-}{q^2(t)}G(y) + \frac{r(t)}{a(t)q(t)}\frac{|y|}{g(y)}$$

$$V'(x,y,t) \le \frac{[q'(t)]^-}{q^2(t)}G(y) + m\frac{r(t)}{a(t)q(t)} + n\frac{r(t)}{a(t)q(t)}G(y).$$

Integrohet në të dy anët prej t_0 deri në t ,si dhe marrim parasysh se $\frac{r(t)}{a(t)q(t)}$ është i kufizuar në $[t_0, T]$, konkludojmë se për $t \in [t_0, T]$, fitohet

$$\frac{1}{q(t)}G(y(t)) \le V(t) \le K_1 + \int_{t_0}^{t}[\frac{[q'(s)]^-}{q(s)} + n\frac{r(s)}{a(s)}](\frac{1}{q(s)})G(y(s))ds$$

për ndonjë konstatntë $K_1 > 0$. Tani nga inekuacioni i Gronwall's-it [8] , marrim

$$\frac{1}{q(t)}G(y(t)) \le K_1 \exp(\int_{t_0}^{t}[\frac{[q'(s)]^-}{q(s)} + n\frac{r(s)}{a(s)}](\frac{1}{q(s)})ds) \le$$

$$\le K_1 \exp(\int_{t_0}^{T}[\frac{[q'(s)]^-}{q(s)} + n\frac{r(s)}{a(s)}](\frac{1}{q(s)})ds) \le K_2 < \infty$$

ku K_2 është konstantë. Nga inekuacioni i fundit kemi $G(y(t))$ i kufizuar në $[t_0, T]$, rrjedhimisht $y(t) = x'(t)$ është i kufizuar në $[t_0, T]$. Përfundimisht duke përdorur integrimin, tregohet se edhe $x(t)$ është i kufizuar në $[t_0, T]$, që është në kundërshtim me supozimin se $(x(t),y(t))$ është zgjidhje e sistemit (10.2) me numër të fundëm këputjesh .

Rrjedhim 10.1[8].Nëse $e(t,x,y) \equiv 0$ në teoremën (10.1) , atëherë kushti (10.3) bie poshtë.

Për funksioni $f(y)$ supozohet se plotëson

$$f(x) \to \infty, \text{ kur } |x| \to \infty \qquad (10.7)$$

Kurse sa i përket kufizueshmërisë së zgjidhjeve të ekuacionit (10.1) vlen:

Teorema 10.2[8]: Supozojmë se vlen (10.5), dhe (10.6) dhe për *n>0*,

$a'(t) \geq 0$ dhe $a(t) \leq a_2$, a_2 është konstantë , $t \geq t_0$ (10.8)

dhe

$$|e(t,x,y)| \leq \frac{1}{n} a(t) \frac{q'(t)}{q(t)}.$$

Nëse

$$F(x) \to \infty, \text{ kur } |x \to \infty|, \tag{10.9}$$

atëherë të gjitha zgjidhjet e ekuacionit (10.1) janë të kufizuara.

Vërtetim: Meqë $F(x) \to \infty$, kur $t \to \infty$, si dhe $F(x)$, i kufizuar nga poshtë , themi ,

$F(x) \geq -K$, për ndonjë konstant K .Tani ,nga

$$V(x,y,t) = \frac{q(t)}{a(t)}\left[F(x) + K\right] + G(y),$$

kemi

$$V'(t) \leq [F(x)+K]\frac{q'(t)}{a(t)} + \frac{1}{a(t)} e(t,x,y)(\frac{y}{g(y)})$$

$$\leq \frac{q'(t)}{q(t)}(\frac{q(t)}{a(t)}[F(x)+K] + \frac{1}{n}\frac{|y|}{g(y)}).$$

Integrojmë jobarazimin e mësipërm prej t_0 deri në t dhe përdorim (10.5) , fitojmë

$$\frac{|y(t)|}{g(y(t))} + n\frac{q(t)}{a(t)}[F(x(t)) + K] \leq m + nV(t)$$

$$\leq m + nV(t_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{q'(s)}{q(s)}[F(x(s)) + K] + \frac{|y(s)|}{g(y(s))})ds.$$

Nëse përdorim jobarazimin e Gronwall's-it , kemi

$$\frac{|y(t)|}{g(y(t))}+n\frac{q(t)}{a(t)}[F(x(t))+K]\le K_1\exp(\int_{t_0}^{t}\frac{q'(s)}{q(s)}ds)=K_1\frac{q(t)}{q(t_0)},$$

ku $K_1>0$, është konstantë. Tani

$$\frac{nq(t)F(x(t))}{a(t)}\le\frac{K_1q(t)}{q(t_0)},$$

$$F(x(t)\le\frac{K_1a_2}{nq(t_0)}$$

prej nga $F(x(t))$, është i kufizuar për $t\ge t_0$.

Përfundimisht , konkluzioni i teoremës tani rrjedh nga (10.9).

Teorema 10.3[8] . Supozojmë sekushtet (10.3) , (10.5) dhe (10.7) , $a(t)\le a_2$, ku a_2 , konstantë dhe

$$\int_{t_0}^{\infty}\frac{[a'(s)]^{-}}{a(s)}ds<\infty \tag{10.10}$$

si dhe $|e(t,x,y)|\le\dfrac{a(t)q'(t)}{Mq(t)}$.

Atëherë të gjitha zgjidhjet e ekuacionit (10.1) janë të kufizuara.

Vërtetim : Kushti (10.6) implikon ekzistencën e konstantës $A>0$, ashtu që

$\dfrac{y^2}{g(y)}\le A+MG(y)$, për çdo y . Shënojmë , nëse $|y|\le 1$, atëherë

$\dfrac{|y|}{g(y)}\le B$, për ndonjë konstantë B dhe nëse $|y|>1$, atëherë

$\dfrac{|y|}{g(y)}\le\dfrac{y^2}{g(y)}$ dhe

$\dfrac{|y|}{g(y)}\le B+\dfrac{y^2}{g(y)}$, për çdo y .

Nga kushti (10.9) $F(x)\ge -K$, për ndonjë konstantë $K>0$.

Nëse $M \geq 1$, përkufizojmë funksionin

$$V(x,y,t) = \frac{q(t)}{a(t)}[F(x)+K] + G(y) + A + B .$$

Tani , meqë $M \geq 1$, kemi

$$V'(t) = \frac{q'(t)}{q(t)}(\frac{q(t)}{a(t)}[F(x)+K] + \frac{1}{M}\frac{|y|}{g(y)}) + \frac{[a(t)]^-}{a(t)}(\frac{q(t)}{a(t)}[F(x)+K] + \frac{y^2}{g(y)})$$

$$\leq \frac{q'(t)}{q(t)}(\frac{q(t)}{a(t)}[F(x)+K] + \frac{1}{M}(A+B+G(y)) +$$

$$\frac{[a(t)]^-}{a(t)}(\frac{q(t)}{a(t)}[F(x)+K] + A + M(G(y))$$

$$\leq (\frac{q'(t)}{q(t)} + M\ \frac{[a(t)]^-}{a(t)})(\frac{q(t)}{a(t)}[F(x)+K] + A + M(G(y)) .$$

Integrohet *V'(t)* nga t_0 deri në t , marrim

$$V(t) \leq V(t_0) + \int_{t_0}^{t} (\frac{q'(s)}{q(s)} + \frac{[a(s)]^-}{a(s)})V(s)ds$$

prej nga

$$V(t) \leq V(t_0)\exp\int_{t_0}^{t} (\frac{q'(s)}{q(s)} + \frac{[a(s)]^-}{a(s)})ds$$

$V(t) \leq K_1 \exp\int_{t_0}^{t} \frac{q'(s)}{q(s)}ds = K_1\frac{q(t)}{q(t_0)}$, ku K_1 është konstantë.

Kufizueshmëria e *x(t)* tani rrjedh ngjashëm si në teoremën 3.

Nëse $M < 1$, përkufizojmë

$$V(x,y,t) = \frac{q(t)}{a(t)}[F(x)+K] + G(y) + \frac{1}{M}(A+B) .$$

Tani meqë $M < 1$, marrim

$$V'(t) \leq \frac{q'(t)}{q(t)}(\frac{q(t)}{a(t)}[F(x)+K]+\frac{1}{M}(A+B)+G(y))+$$

$$\frac{[a(t)]^{-}}{a(t)}(\frac{q(t)}{a(t)}[F(x)+K]+A+M(G(y))$$

$$\leq (\frac{q'(t)}{q(t)}+\frac{[a(t)]^{-}}{a(t)})V(t).$$

Pjesa tjetër e teoremës në vazhdim është ngjashëm si në vërtetimin e teoremës 2.

Teorema 10.4[8] : Supozojmë se vlejnë kushtet (10.3), (10.4), (10.9) dhe (10.10),

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{[q'(s)]^{-}}{q(s)} ds < \infty, \tag*{`(10.11)}$$

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{r(s)}{q(s)} ds < \infty \tag{10.12}$$

dhe se ekziston konstanta pozitive N , ashtu që

$$\frac{y^2}{g(y)} \leq N, \tag{10.13}$$

atëherë të gjitha zgjidhjet e ekuacionit (10.1) janë të kufizuara.

Vërtetimin e kësaj teoreme e gjeni në [8] .

Në vazhdim duke u mbështetur në teoremat e mësipërme paraqiten kushte të caktuara ashtu që zgjidhjet e ekuacionit në vazhdim të jenë të kufizuara.

Është fjala për ekuacionin e formes

$$(r(t)g(\varphi(x(t))x'(t))'+q(t)f(x(t))=0 \tag{10.14}$$

ku

A$_1$) $r(t) \in C([t_0,\infty)),\ r(t)>0$, per $t \geq t_0$,

A$_2$) $f(x) \in C(\Re),\ xf(x)>0$, per $x \neq 0$,

A$_3$) $g(x) \in C(\Re),\ 0<m \leq g(x) \leq M$, për $x \in \Re$,

A_4) $q(t) \in C([t_0, \infty))$, $q(t) > 0$ per $t \geq t_0$.

vlen kjo:

Teorema 10.5[61]. Le te jetë $r(t), q(t) \in C^1([t_0, \infty))$ dhe $(r(t)q(t))' \geq 0$, për $t \geq t_0$

dhe

$$\int^{\pm\infty} f(l)g(l)dl = \infty , \tag{10.15}$$

atëherë zgjidhja $x(t)$ e ekuacionit (10.14) ashtu që $x(t_1) = 0,\ t_1 \geq t_0$ për ndonjë

$t_1 \in [t_0, \infty)$ është e kufizuar.

Vërtetimi : Led të jetë $x(t)$ zgjidhje e çfarëdoshme e ekuacionit (10.14) ashtu që

$x(t_1) = 0,\ t_1 \geq t_0$.

Marrim

$$F(t) = \int_{x(t_1)}^{t} f(l)g(\varphi(l))dl . \tag{10.16}$$

Nëse shumëzohet ekuacioni (10.14) me $r(t)g(\varphi(x(t))x'(t)$, fitohet

$$\frac{1}{2}((r(t)g(\varphi(x(t))x'(t))^2)' + r(t)q(t)g(\varphi(x(t))x'(t)q(t)f(x(t)) = 0$$

integrohet barazimi i fundit prej t_1 deri t, fitojmë

$$\frac{1}{2}(r(t)g(\varphi(x(t))x'(t))^2 - \frac{1}{2}(r(t_1)g(\varphi(x(t_1))x'(t_1))^2 +$$

$$+ r(t)q(t)F(x(t)) - \int_{t_1}^{t} (r(s)q(s))'F(x(s))ds = 0 \tag{10.17}$$

Shënojmë

$$c = \frac{1}{2}(r(t_1)g(\varphi(x(t_1))x'(t_1))^2$$

tani nga (10.17) rrjedh :

$$r(t)q(t)F(x(t) \leq c + \int_{t_1}^{t} (r(s)q(s))' F(x(s))ds = c + \int_{t_1}^{t} \frac{(r(s)q(s))'}{r(s)q(s)} r(s)q(s)F(x(s))ds \quad (10.18)$$

që , nga inekuacioni i Granwalls-it , kemi

$$r(t)q(t)F(x(t) \leq c \cdot e^{\int_{t_1}^{t} \frac{(r(s)q(s))'}{r(s)q(s)} ds} \quad (10.19)$$

prej nga

$$F(x(t)) \leq \frac{c}{r(t_1)q(t_1)}, \quad t_1 > t_0 > 0 \quad (10.20)$$

pra, $F(x(t))$ është i kufizuar dhe nga (10.16), zgjidhja $x(t)$ është e kufizuar .

11. Zbatim i zgjidhjeve oshiluese të ekuacionit diferencial të rendit të dytë

Meqë zbatimet e teoris së oshilacionit janë të shumta ne këtu do të përqëndrohemi konkretisht në konstruktimin praktik ku zgjidhjet e ekuacionit diferencial paraqesin lëvizje oshiluese të trupit në kushtet e caktuara.

Shqyrtojmë aplikimin që ka barazimi diferencial i rendit të dytë i formës

$$(r(t)x'(t))' + p(t)f(x(g(t))) = 0 \qquad (11.1)$$

në inxhinjeri. Këtu po demostrohet vibrimi i telit të kompresuar .

Konsiderojmë lëvizjen e një objekti me masë m i përforcuar në fund të një teli i cili qëndron vertikal (si në fig.1) ose horizontal në një sipërfaqe rrëshqitëse (si në fig.2)

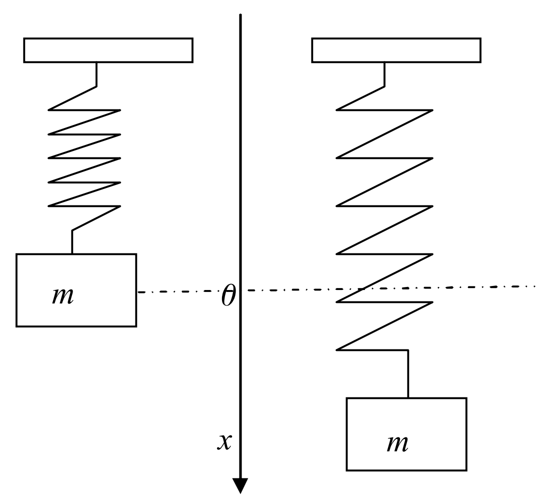

fig.1

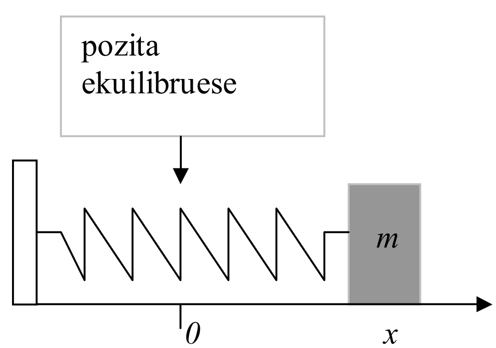

fig.2

Marrim në zbatim ligjin e Hookut , i cili thot : nëse teli është i zgjatur (ose i kompresuar) x njësi nga gjatësia naturale e tij, atëherë ai kundërvihet me forcë e cila është proporcionale me gjatësinë x :

forca rezistuese $= -kx$

ku k është konstantë pozitive (quhet konstanta e telit) . Nëse përjashtojmë forcat rezistuese të jashtme (rezistencën e ajrit ose të fërkimit) , atëherë nga ligji dytë i Njutnit (forca baraz me prodhimin e masës dhe nxitimit), kemi

$$m\frac{dx^2}{dt^2} = -kx, \text{ ose } \quad x''(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0$$

i cili është një rast special i barazimit (11.1) për $p(t) = \frac{k}{m} > 0$ dhe $f(x(g(t)) = x(t)$, ku mund të vërehet se në këto kushte plotësohen kriteret e cituara më sipër për zgjidhjet oshiluese .

Ky paraqet një barazim diferencial linear të rendit të dytë . Barazimi i tij ndihmës është

$$mr^2 + k = 0, \text{ me rrënjët } \quad r = \pm\omega i, \text{ ku } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} .$$

Prandaj zgjidhja e përgjithshme është

$$x(t) = c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t$$

e cila mund të shkruhet në formën

$$x(t) = A\cos(\omega t + \delta)$$

ku

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \textit{(frekuenca)}$$

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \qquad \textit{(amplituda)}$$

$$\cos\delta = \frac{c_1}{A} \qquad \sin\delta = -\frac{c_2}{A} \qquad (\delta \textit{ është këndi fazor})$$

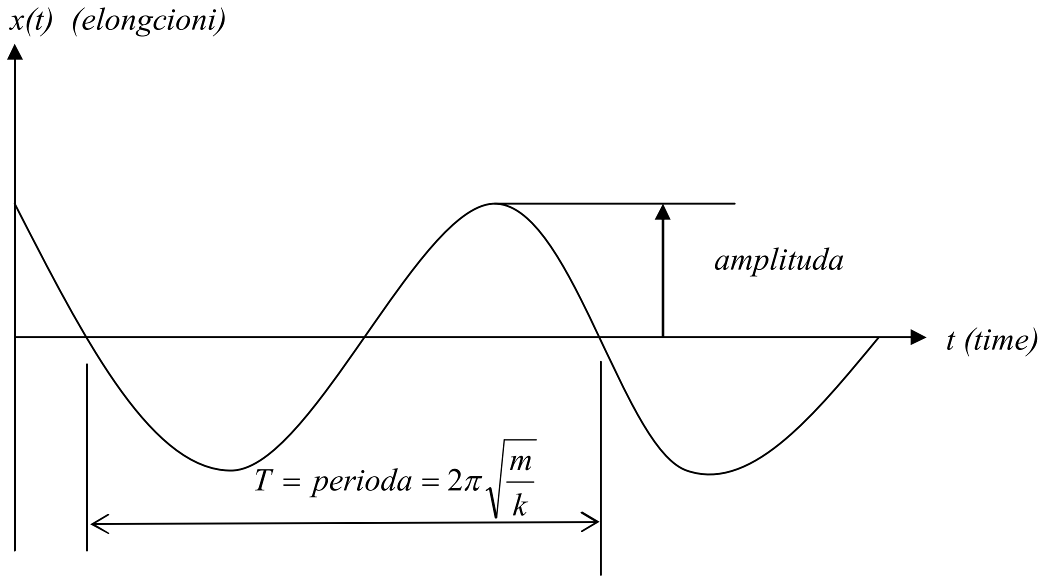

fig.3

Zgjidhja matematikore :

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$$

x(t) përbëhet prej funksioneve cosinus dhe sinus të variablit t (koha), pra kemi një barazim oshilues , zgjidhjet e të cilit oshilojnë pranë boshtit *x* me amplitudën e vibrimit *x(t)*.

Për dallim nga rasti i mësipërm për barazimin e rendit të dytë me anëtarë shuarje të formës

$$(r(t)x'(t))' + p(t)x'(t) + q(t)f(x(g(t))) = 0 \qquad (11.2)$$

të shqyrtuar në ngjarjen : teli i kompresuar në tërheqje të një mase duke llogaritur edhe fërkimin përgjat lëvizjes. Më qartë në lëvizjen e masës nga teli i kompresuar ndikon fërkimi i ajrit (ujit) në lëvizjen e masës. Supozimi i zakonshëm i forcës së fërkimit është madhësi me kahje të kundërt me kahjen e lëvizjes dhe është madhësi proporcionale me shpejtësinë. Nëse nuk ka forcë të jashtme , kjo mund të prezentohet me ekuacionin diferencial të rendit të dytë :

$$mu''+\gamma u'+ku = 0 \tag{11.3}$$

(ku $\gamma u'$ është madhësi e forcës së fërkimit)

me ekuacionin karakteristik

$$mr^2 + \gamma r + k = 0$$

i cili ka rrënjët

$$r_{1,2} = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4km}}{2m}.$$

Nga barazimi i fundit ne kemi tre raste për zgjidhjen gjenerale të barazimit , por zgjidhje oshiluese kemi në rastin kur

$$\gamma^2 < 4km$$

dhe zgjidhja e përgjithshme ka formën

$$u(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}.$$

Për $\alpha = \sqrt{4km - \gamma^2}$, kemi zgjidhjen e përgjithshme e cila ka formën

$$u(t) = e^{-\frac{\gamma}{2m}t}(A\cos(\alpha t) + B\sin(\alpha t)) = \mathrm{R}e^{-\frac{\gamma}{2m}t}\cos(\alpha t - \delta)$$

ku $R = \sqrt{A^2 + B^2}$, dhe $\delta = \tan(\frac{B}{A})$.

Në ekuacionin diferencial (11.2), nëse *r(t)=m, p(t)=*γ *, q(t)=k, g(t)=t dhe f(x)=x,* , kemi ekuacionin (11.3) i cili është oshilues kur koeficientët e tij plotësojnë kushtet e teoremave të prezentuara në këtë punim.

Teoremat e cekura më lart mund të zbatohen edhe kur koeficienti i fërkimit k është i ndryshueshëm dhe jo homogjen gjë që vlen edhe për koeficientin e telit γ , rrjedhimisht të ndryshojnë sipas ndonjë funksioni.

Literatura

[1]Qinghua Feng , Interval oscillation criteria for second order delay differential equations, Procedings of the world congres on enginering , july, 1 – 3, London , 2009 .

[2] Chanturia, T. A. Kiguradze, I. T. Asimtotic properties nonautonomous ordinary differential equations, Nauka moskow 1990 (Russian).

[3] B. Bakulikova , Oscillation criteria for second order nonlinear diferential equations archivum mathematicum Brno , 141 – 149, 2006 .

[4]Moussadek Remli; Oscillation criteria for second order nonlinear perturbed diferential equations , electgronic jurnal of qualitative theory of differential equations , N0. 25, 1- 11, 2010.

[5]Horn Jaan Li ; Oscillation criteria for half –linear second order differential equations Hiroshima math. J. 25, 571-583, 1995 .

[6] Wang T. L. Interval oscillation criteria for nonlinear second – order differential equations , Indian J. math. anal. 32(7) 1003 – 1014, july 2001.

[7]Wang T.L. Interval oscillation criteria for nonlinear second – order differential equations with damping ,Taiwanese journal of mathematics , vol. 7, N0. 3, pp. 461 - 475 september 2003.

[8]. Ravi P. Agarval, Said R. Grace, Donal O'Regan ;Oscillation Theory for second order linear, half-linear superlinear and sublinear dynamic equation, Florida institute of technology , 2002 .

[9]Ch.G. Philos; Oscillation teorem for linear differential equations of second order , Arch. math. (Basel) 53 (5), 482 – 492, 1989 .

[10]A. Lomotidze*;* Oscillation and nonoscillation criteria for second order linear differential equations, *Georgian Mathematical Jurnal* , p. 129 – 138, 1997.

[11]Xh. Beqiri; Interval oscillation of nonlinear diferential equations second order, *The Heritage* , 122-128, 4/2011,.

[12]Kiguradze I.T. On the oscillation of solutions of the equation

$\frac{d^m u}{dt^m} + a(t)|u|^n signu = 0$, *Mat.Sb.* 65 172-187 , 1964, (Russian).

[13] Aydin Tiryaki; Oscillation criteria for a certain second order nonlinear differential equations with deviating arguments; electronic jurnal of qualitative theory of differential equations N_0 . 61,1-11, 2009.

[14] Yuri V. Rogovchenko;Interval oscillation of a second order nonlinear differential equation with a damping term, Discrete and continuous dynamical systems supplement , pp. 883 – 891, 2007 .

[15] M.M.A. El Sheikh, R.A.Sallam, D.I. Elimy; oscillation criteria for nonlinear second order damped differential equations, International journal of nonlinear science , vol.10, nr. 3, 297 – 307, 2010.

[16]S.R. Grace and B.S. Lalli and C.C. Yeh, Oscillation theorems for nonlinear second order diferential equations with a nonlinear damping term bull. inst. Math. Acad. Sinica 13, 183 – 192, 1984.

[17] M. Kirane and Yu V. Rogovcenko ; Oscillation result for second order damped differential equation with nonmonotonous nonlinearity, Math. anal. apll. 250, 118 – 138 , 2000.

[18] W.T.Li and P.Agarwal, interval oscillation criteria related to integral averaging technique for certain nonlinear differential equations, J. Math. anal. appl. 245, 171 – 178, 2000.

[19]Xh. Beqiri and E. Koci ; Oscillation criteria for second order nonlinear perturbed differential equations,Hieritage , 83-90, 6/2011.

[20]Tai-Ran Hsu ; Application of second order differential equations in mechanical engeneering Analysis; California Usa.

[21]Some applications of second order differential equations; september 2010.

[22]Charles Burne; Notes on Sturm-Liouville differential equations MA 01854, april 9, 2009 USA.

[23]XH. Beqiri; Kritere intervalesh oshilacioni për ekuacionin jolinearë diferencial të rendit të dytë, Konferencë kombëtare " Studime të avancuara në inxhinjerinë matematike, fizike dhe kimike " 20 tetor fq. 39, 2011.
[24] Ioannis P. Stavroulakis; Oscillation criteria for functional differential equations, electronic jurnal on diff. equat. and appl. in math. biology, 171-180, 2005.
[25]Xh. Beqiri; Oscillation criteria for second order nonlinear differential equations; International conference " Information system and technologies and their importance in the economic development" Tirana , june 10-11, 2011.
[26]Samir H. Samer; Oscillation theorems for second order nonlinear functional differential equations with damping,Dynamic sys. appl. 12, 3007-322, 2003 ,.
[27] Einar Hille; Non-oscillation theorems.234-252, Uale University, 1947.
[28] Zeev Nehari; Oscillation criteria for second – order linear differential equations, 428-445,july , 5 , United States air force office of scientific research , 1956.
[29] C.D. Aliprantis and K.C. Border, Infinite Dimension analysis ,Springer , Berlin, 1984.
[30] J.V. Manojlovic; Oscillation criteria for second order half-linear differential equations;Mathematical and computer modelling 30, 109-119, 1999.
[31] N. Kandelaki, A. Lomtatidze and D. Ugulava;On oscillation and nonoscillation of second order half-linear equation, Volume 7, , number 2, 329-346 ,2000 .
[32] Andrej Dosly; Qualitative theory of half – linear second order differential equations, Proceedings of eaqua. diff. 10 Prague, august 27-31, 2001.
[33]Jozef Dzurina; Oscillation criteria for second order nonlinear retarded differential equations, Mathematica Slovaca, vol. 54, N0. 3, 245-253, 2004 .
[34]Zhiting xu, Yong Xia; Kamenev – type oscillation criteria for second order quasilinear differential equations, Electronic journal of differential equations, vol. N0. 27, pp.1-9, 2005,.
[35] Ondrej Dosly and Alexander Lomtatidze ; On oscillation and nonoscillation criteria for half-linear second order differential equations; Hiroshima Math. J. 36, 203-219, 2006.

[36]Ondrej Dosly and Zuzana Patikova; Hille – winter type comparison criteria for half-linear second order differential equations , Arhivum mathematicum , Tomus 42, 185-194, 2006.
[37]Peter Hasil; Conditional oscillation of half – linear differential equations with periodic coefficients; Arhivum mathematicum, tomus 44, 119-131, 2008.
[38] P. Hartman, On nonoscillatory linear differential equations of second order, Amer. J. Math., 74 389 - 400 , 1952.
[39] A. Wintner, A criterion of oscillatory stability, Quart. Appl. Math., 7 ,115-117 ,1949.
[40] I. V. Kamenev, An integral criterion for oscillation of linear differential equations of second order, Math. Zametki., 23, 249-251, 1978.
[41] Suzana Patikova; Hartman- Wintewr type criteria for half-linear second order differential equations, matematica bohemica N0. 3, 243-256, 2007
[42] W. Leighton. The detection of the oscillations of solutions of a second order linear differential equation. *Duke Math. J.*, 17:57–62, 1950.
[43] Aydin Tyryaki and Agacik Zafer ; Oscillation criteria for second order non-linear differential equations with damping, Turk J. Math. 24 , 185-196, 2000.
[44] S.R.Grase, On the oscillatory and asymptotic behavior of damping functional differential equations, Math. Japonica 36 ,220-237, 1991.
[45]Xiaojing wang and Guhoua Song; Oscillation criteria for a second order non-linear damped differential equations , Internat. Jurnal of inform. and systems sciences, volume 7. Nr. 1, 73-82, 2011.
[46]L. Erbe, T.S. Hassan and A. Peterson ; Oscillation of second order neutral delay differential equations, research India publication , volum 1 , pp. 53-71, 2008.
[47] J.Yan, Oscillation theorems for second order nonlinear differential equations with damping, Proc. Amer. Math. Soc., 98, 276-282, 1986.
[48]Deng J. Oscillation criteria for second – order linear differential equations , J. Math. Anal. and appl. p. 283-287, 2002.
[49] Yang X. Oscillation criteria for a class of quasilinear differential equations , Appl. Math. comput. , p. 225-229, 2004 .

[50] N. Jamaoka , Oscillation and nonoscillation theorems for second order nonlinear differential equations with p – Laplacian, Mem. Fac. Sci. Eng. Shimane Univ. p. 17-30, 2005.
[51] Jan Ohriska, Antonia Zulova , Oscillation criteria for second order non – linear diferential equation, Institute of mathematics , P. J. Safarik University, Jesenna, p. 1 – 10 , 2004.
[52] E. M. E. Zayed M. A. El – Maneam, Same oscillation criteria for second order nonlinear functional equations , Math. dep. fac. of Zagazig , Egypt, p. 603 – 610, 2005.
[53] Jozef Dzurina , Oscillation theorems for second order advanced neutral differential equations, Math. ins. Slovak academy of sciens, p. 61 – 71 , 2011.
[54] S. M. Nababan , Oscillation of second order nonlinear diferential equations, Dosen pada Fackultas Matematika ITB, p. 1 – 9, 1996,.
[55] J. G. O'Hara, On an oscillation for a second order linear quasi – differential equations, J. London Math. soc. p. 251 – 260, 1996,.
[56] E. M. Elabbasy, Sh. R. Elzeiny, Oscillation theorems concerning non – linear diffewrential equations of the second order, Opuscula mathematica, vol. 31 Nr. 3, p.373 – 391, 2011.
[57]W. B. Fite , Concerning the zeros of the solutions of certian differential equations, trans. Amer. Math. Soc. 19, 341-240 , 1918 .
[58] P. Hartman , Non oscillatory linear differential equations of second order, Amer. J. Math. 74 , 389-400, 1952 .
[59]J. S. W. Wong, Oscillation theorems for second order nonlinear differential equations, Bull. Inst. Math. Acad. Simca 3, 283-309, 1975 .
[60] I. Bihari , An oscillation theorem concerning the half linear diferential equationof the second order , Magyar Tud. Akad. Kutato int. Kozl. 8 , 275-280, 1963 .
[61]Xh. Beqiri, E. Koci; Oscillation Theorems for second order differential equations and their application, international conference " Information systems and technology innovation : their application in economy"8 – 9 juny 2012.
[62]E. Koci, Xhevair Beqiri, E Dhamo; Oscillation criteria of nonlinear dynamic equations with a single delay, International jurnal of science , innovation and new technology, vol. 2, N.3, p. 1 – 10, 2012.

[63] D. Cakmak; oscillation criteria for nonlinear second order differential equations with damping, m. 60. N. 5, ukr. math. jurn., 694 – 700, 2008.
[64]Xh. Beqiri, E. Koci; Interval oscillation criteria for second order nonlinear diferential equations with damping term, Inter. Jurn. of science, innovat. and new technol., Vol.1. N.2, 85 – 92, 2011,.
[65]E. Koci, Xh. Beqiri, E. Dhamo; Mbi perdorimin e ekuacionit diferencial me vonesa ne modelin matematikor te projektimit te popullates, Rev. Shq. soc. eko. Nr.5,147 – 154 , 2011.
[66] M. Hesaaraki , A. Moradifam; oscillation criteria for second order nonlinear self-adjoint differential equations, Meth. and appl. of anal. Vol.13, N.4 , 373 – 385, 2006.